NASA TT F-9397

FLOW IN A CONDUIT OF AN ELECTRICALLY CONDUCTING COMPRESSIBLE FLUID UNDER THE ACTION OF A NONUNIFORM MAGNETIC FIELD

Roger Peyret

NASA TT F-9397

N65-27642

(ACCESSION NUMBER) (THRU)

13 1

(PAGES) (CODE)

25

(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER) (CATEGORY)

FACILITY FORM 602

GPO PRICE $

OTS PRICE(S) $

Hard copy (HC) 1.00

Microfiche (MF) .50

Translation of "Ecoulement en conduite d'un fluide compressible, conducteur de l'électricité, sous l'action d'un champ magnétique non uniforme." Unpublished manuscript. 1965.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON JUNE 1965

NASA TT F-9397

MAGNETODYNAMICS OF FLUIDS */1

FLOW IN A CONDUIT OF AN ELECTRICALLY CONDUCTING COMPRESSIBLE FLUID UNDER THE ACTION OF A NONUNIFORM MAGNETIC FIELD

Roger Peyret

27642

The two-dimensional flow in mean-square time, in a plasma accelerator with progressive waves is discussed, specifically taking into consideration the effect of the axial component of the magnetic field. The solution obtained by the linearization method permits calculating the acceleration of the fluid and demonstrates a confinement effect.

Author

1. Two previous papers (Bibl.1, 2) were concerned ~~with~~ investigating the nonstationary flow in a progressive-wave plasma accelerator, in a one-dimensional approximation (zero transverse velocity). The effects of the component along the axis of the conduit of the applied magnetic field and the effects of the induced fields are negligible. The height of the channel 2h is assumed as small with respect to the wavelength λ of the progressive velocity field $\tilde{v}$.

In the present paper, certain of these hypotheses are abandoned and the following is assumed: a) a magnetic Reynolds number $Rm = \mu\sigma\tilde{\alpha}_0\lambda$, small but not zero ($Rm^2$ neglected); b) an interaction parameter $RmP = RmE_M(\tilde{v}^2\mu\tilde{\rho}_0\tilde{\lambda}_0^2)^{-1}$ small but not zero [$(RmP)^2$ neglected]; c) $\delta = h/\lambda$, arbitrary; d) only the mean value of the flow with time is considered; consequently, the independent variables are x and y (where Ox has the direction of the channel axis). Under these

* Numbers in the margin indicate pagination in the original foreign text.

hypotheses, it is assumed that, for mean flow magnitudes, a double asymptotic expansion exists which proceeds in accordance with the two small parameters RmP and Rm, of the form*

$$\varphi(x,y;R_mP,R_m,\delta) = \varphi_0 + R_mP\left\{\hat{\varphi}_0(x,y;\delta) + R_m\hat{\varphi}_1(x,y;\delta)\dots\right\}+\dots$$
$$= \varphi_0 + R_mP\,\varphi^{(1)}(x,y;R_m,\delta)+\dots$$

The equations, taking the limit conditions into consideration, demonstrate /2
that, for the aerodynamic quantities, such a double expansion does not contain terms in powers of Rm. In dimensionless quantities, we have:

$$u = \tilde{u}/\tilde{a}_0\ ,\quad v = \tilde{v}/\delta\tilde{a}_0\ ,\quad x = \tilde{x}/\lambda\ ,\quad y = \tilde{y}/h\ ,\quad \mathcal{M}_0 = \tilde{V}/\tilde{a}_0$$

[for the other quantities, see another paper (Bibl.1)]; the equations for the mean perturbation flow can then be written as

$$M_0\,u_x^{(1)} + p_x^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_0 - M_0)(1-\tanh^2\delta)\cosh^2\delta y \tag{1}$$

$$\delta^2 M_0\,v_x^{(1)} + p_y^{(1)} = -\frac{1}{4}R_m(\mathcal{M}_0 - M_0)^2(1-\tanh^2\delta)\,\delta^2 y \tag{2}$$

$$M_0\,p_x^{(1)} + u_x^{(1)} + v_y^{(1)} = \frac{\gamma-1}{2}(\mathcal{M}_0 - M_0)^2(1-\tanh^2\delta)\cosh^2\delta y \tag{3}$$

with the limit conditions:

$$u^{(1)} = v^{(1)} = p^{(1)} = 0 \quad \text{in } x=0;\quad v^{(1)} = 0 \quad \text{in } y = \pm 1\ .$$

Equations (1) and (2) are the equations of the quantities of motion; eq.(3) is a combination of the equations of continuity, energy, and state (ideal gas). The second terms of eqs.(1) and (2) contain the electromagnetic force; its two components depend on y and, in addition, its transverse component is proportional to Rm.

---

* The meaning of the letters and symbols is identical to that given elsewhere (Bibl.1).

2. This system is equivalent to a wave equation with a second term for each of the unknowns $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $p^{(1)}$ which can be reduced by the classical method of wave equation solution. Since the limit conditions are given on the straight lines $x = 0$ and $y = \pm 1$, the solution (which is continuous) has a different form in each of the regions defined by these two straight lines, by the characteristics originating at the points ($x = 0$, $y = +1$), ($x = 0$, $y = -1$), /3 and by the characteristics reflected along the walls (see Fig.1). The solution in the region ν, $[(2n)_+, (2n)_-, (2n+1)]$, for $u^{(1)}$ and $v^{(1)}$, for example, is written as follows:

$$u_\nu^{(1)} = (1-\tanh^2\delta)\Big\{-\frac{K}{\beta}\cosh 2\delta(I_\nu - y)\sinh\frac{2}{\beta}[x-(\nu-1)\delta\beta] - 2\frac{K}{\beta^2}x + \frac{\mathcal{M}_0 - M_0}{2M_0}x\cosh^2\delta y -$$
$$-(\nu-1)\frac{K}{\beta}\sinh 2\delta - \frac{R}{2\beta^2}[x-(\nu-1)\delta\beta]^2 + \frac{1}{2}R\delta^2 I_\nu(2y - I_\nu)\Big\}$$

$$v_\nu^{(1)} = (1-\tanh^2\delta)\Big\{\frac{K}{\delta}\sinh 2\delta(I_\nu - y)\cosh\frac{2}{\beta}[x-(\nu-1)\delta\beta] - 2\frac{K}{\delta}\sinh\delta(I_\nu - y)\cosh\delta(I_\nu + y) +$$
$$+ R(I_\nu - y)[x-(\nu-1)\delta\beta]\Big\}.$$

with

$$I_\nu = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y)[1+(-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu = 2n+1 \quad \text{region } (2n+1) \\ 1 & \text{if } \nu = 2n,\ y > 0 \quad \text{region } (2n)_+ \\ -1 & \text{if } \nu = 2n,\ y < 0 \quad \text{region } (2n)_- \end{cases}$$

$$K = (8M_0)^{-1}(\mathcal{M}_0 - M_0)[(\gamma-1)M_0(\mathcal{M}_0 - M_0) - 1],\quad \beta^2 = M_0^2 - 1,\quad R = (4M_0)^{-1}(\mathcal{M}_0 - M_0)^2 R_m$$

3. Figure 2 shows the acceleration of the fluid along the axis ($y = 0$, $v^{(1)} = 0$) for three values of δ ($\delta = 0$; 0.1; 0.2) and for $R_m = 0$. The interval of the investigated values of x approximately corresponds to the length of the

accelerator. It is obvious that $u^{(1)}$ is a decreasing function of δ of slow /4
variation: The effect of the height of the channel on the acceleration is thus quite negligible.

For $Rm \neq 0$, the acceleration is slightly decreased: Under the conditions involved here, at $Rm = 0.3$ and in the investigated interval of x, this decrement does not exceed 3×10^{-4}.

At the wall ($y = \pm 1$), the velocity is slightly greater than along the axis; thus, for $\delta = 0.1$, the increment is of the order of 3×10^{-3}.

4. Figure 3 shows the evolution of the mass rate of flow of perturbation $(u^{(1)} + M_0 \rho^{(1)})$ at the wall ($y = \pm 1$) and along the axis ($y = 0$) for $Rm = 0$ and $Rm = 0.3$ in the case of $\delta = 0.1$. These curves demonstrate that the fluid has a tendency to approach the channel axis so that a confinement effect appears, even if $Rm = 0$. In this latter case, the electromagnetic force which becomes purely axial is greater along the walls than along the axis. Thus, the acceleration of the fluid is greater along the wall while, conversely, $\rho^{(1)}$ decreases so rapidly that the group $(u^{(1)} + M_0 \rho^{(1)})$ is a negative and decreasing function of x for $y = \pm 1$, whereas it is positive and increasing for $y = 0$. Speaking more generally, the confinement effect is increased if Rm or δ increase.

These results must be correlated with those obtained elsewhere (Bibl.3) for the case of a slightly different electromagnetic force.

5. As in the linearized study of the one-dimensional approximation (Bibl.1), the solution of eqs.(1) - (3) represents the flow as long as x is sufficiently low to have the term $Rm P \varphi^{(1)}$ be small with respect to φ_0.

BIBLIOGRAPHY /5

1. Peyret, R. and Moulin, Th: Comptes rendus, Vol.259, p.1810, 1964.

2. Peyret, R.: Comptes rendus, Vol.259, p.2592, 1964.

3. Fabri, J. and Moulin, Th.: 11th International Congress of Applied Mechanics, Munich 1964.

Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California

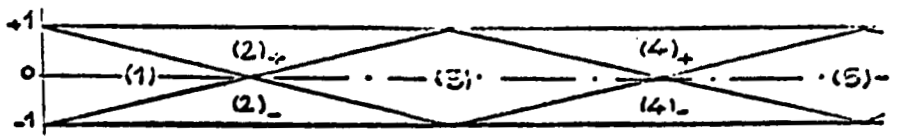

Fig.1

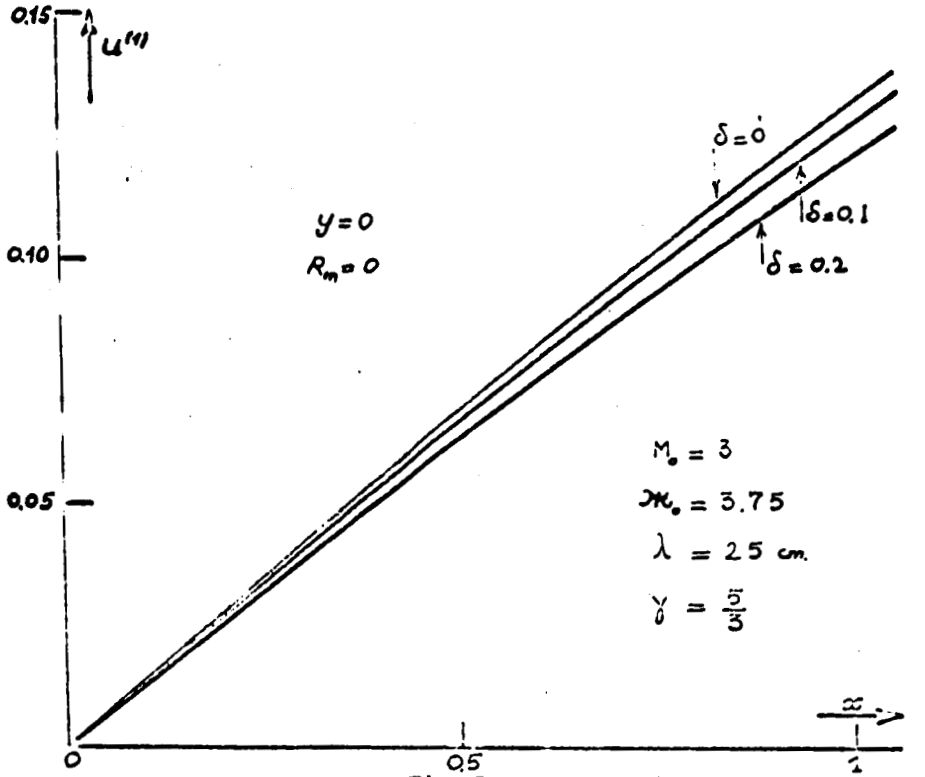

Fig.2

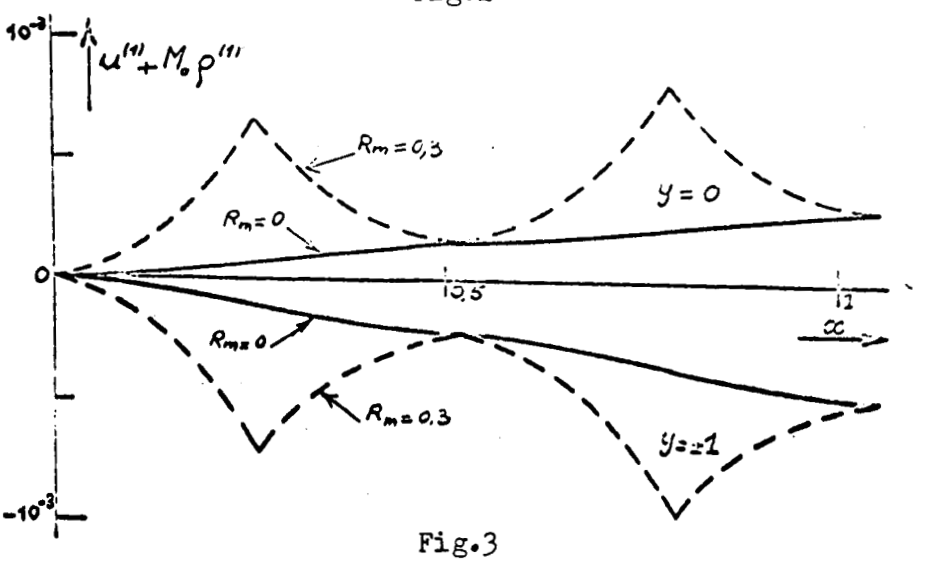

Fig.3

MAGNETODYNAMIQUE DES FLUIDES. - Ecoulement en conduite d'un fluide compressible, conducteur de l'électricité, sous l'action d'un champ magnétique non uniforme. Note de M. ROGER PEYRET, présentée par M.

On considère l'écoulement bidimensionnel en valeur moyenne dans le temps dans un accélérateur de plasma à ondes progressives, en tenant compte en particulier de l'effet de la composante axiale du champ magnétique. La solution obtenue par la méthode de linéarisation permet de calculer l'accélération du fluide et met en évidence un effet de confinement.

1. Deux Notes précédentes (1), (2), ont été consacrées à l'étude de l'écoulement non stationnaire dans un accélérateur de plasma à ondes progressives dans une approximation unidimensionnelle (vitesse transversale nulle); les effets de la composante suivant l'axe du canal du champ magnétique appliqué et ceux des champs induits étant négligés; la hauteur du canal $2h$ étant supposee petite devant la longueur d'onde λ du champ progressif de vitesse $\tilde{V}$.

Dans la présente Note certaines de ces hypothèses sont abandonnées et l'on supposera: (a) le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu \sigma \tilde{a}_0 \lambda$ petit mais non nul (R_m^2 négligé); (b) le paramètre d'interaction $R_m P = R_m E_M^2 (\tilde{V}^2 \mu \tilde{\rho}_0 \tilde{a}_0^2)^{-1}$ petit mais non nul ($(R_m P)^2$ négligé); (c) $\delta = h/\lambda$ quelconque; (d) seul l'écoulement en valeur moyenne dans le temps est considéré; les variables indépendantes sont donc x et y (Ox étant dirigé suivant l'axe du canal)(3). Sous ces hypothèses on suppose qu'il existe, pour les grandeurs de l'écoulement moyen un double développement asymptotique, procédant suivant les deux petits paramètres $R_m P$ et R_m, de la forme

$$\varphi(x, y; R_m P, R_m, \delta) = \varphi_0 + R_m P \left\{ \hat{\varphi}_0(x, y; \delta) + R_m \hat{\varphi}_1(x, y; \delta) + \dots \right\} + \dots$$
$$= \varphi_0 + R_m P \, \varphi^{(1)}(x, y; R_m, \delta) + \dots$$

Les équations, compte tenu des conditions aux limites, montrent que, pour les grandeurs aérodynamiques, un tel développement double ne contient pas de termes en puissances de R_m . En grandeurs adimensionnelles: $u = \check{u}/\check{a}_0$, $v = \check{v}/\delta \check{a}_0$, $x = \check{x}/\lambda$, $y = \check{y}/h$, $\mathcal{M}_0 = \check{V}/\check{a}_0$ (pour les autres quantités voir (1)), les équations de l'écoulement moyen de perturbation peuvent s'écrire

$$(1) \qquad M_0 u_x^{(1)} + p_x^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_0 - M_0)(1 - th^2\delta)\, ch^2 \delta y$$

$$(2) \qquad \delta^2 M_0 v_x^{(1)} + p_y^{(1)} = -\frac{1}{4} R_m (\mathcal{M}_0 - M_0)^2 (1 - th^2\delta)\, \delta^2 y$$

$$(3) \qquad M_0 p_x^{(1)} + u_x^{(1)} + v_y^{(1)} = \frac{\gamma - 1}{2} (\mathcal{M}_0 - M_0)^2 (1 - th^2\delta)\, ch^2 \delta y$$

avec les conditions aux limites:

$$u^{(1)} = v^{(1)} = p^{(1)} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 ; \qquad v^{(1)} = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1$$

Les équations (1) et (2) sont les équations des quantités de mouvement; (3) est une combinaison des équations de continuité, de l'énergie et d'état (gaz parfait). Au seconds membres de (1) et (2) figure la force électromagnétique; ses deux composantes dépendent de y , en outre sa composante transversale est proportionnelle à R_m .

2. Ce système est équivalent a une équation des ondes avec second membre pour chacune des inconnues $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $p^{(1)}$, que l'on peut résoudre par la méthode classique de résolution de l'équation des ondes. Les conditions aux limites étant données sur les droites $x = 0$ et $y = \pm 1$, la solution (qui est continue) a une forme différente dans chacune des régions définies

par ces deux droites, par les caractéristiques issues des points $(x=0,\ y=+1)$, $(x=0,\ y=-1)$ et par les caractéristiques réfléchies le long des parois (voir Fig. 1). La solution dans la région ν, $[(2n)_+, (2n)_-, (2n+1)]$, pour $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ par exemple, s'écrit:

$$u_\nu^{(1)} = (1-th^2\delta)\Big\{-\frac{K}{\beta}\,ch\,2\delta(I_\nu - y)\,sh\,\frac{2}{\beta}[x-(\nu-1)\delta\beta] - 2\frac{K}{\beta^2}\,x + \frac{\mathcal{M}_0 - M_0}{2M_0}\,x\,ch^2\delta y - \\ -(\nu-1)\frac{K}{\beta}\,sh\,2\delta - \frac{R}{2\beta^2}[x-(\nu-1)\delta\beta]^2 + \frac{1}{2}R\delta^2 I_\nu(2y - I_\nu)\Big\}$$

$$v_\nu^{(1)} = (1-th^2\delta)\Big\{\frac{K}{\delta}\,sh\,2\delta(I_\nu - y)\,ch\,\frac{2}{\beta}[x-(\nu-1)\delta\beta] - 2\frac{K}{\delta}\,sh\,\delta(I_\nu - y)\,ch\,\delta(I_\nu + y) + \\ + R(I_\nu - y)[x-(\nu-1)\delta\beta]\Big\}.$$

avec

$$I_\nu = \frac{1}{2}(sgn\,y)[1+(-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu = 2n+1 & \text{région } (2n+1) \\ 1 & \text{si} \quad \nu = 2n\ ,\ y>0 & \text{région } (2n)_+ \\ -1 & \text{si} \quad \nu = 2n\ ,\ y<0 & \text{région } (2n)_- \end{cases}$$

$$K = (8M_0)^{-1}(\mathcal{M}_0 - M_0)[(\gamma-1)M_0(\mathcal{M}_0 - M_0) - 1],\quad \beta^2 = M_0^2 - 1\ ,\quad R = (4M_0)^{-1}(\mathcal{M}_0 - M_0)^2 R_m$$

3. La figure 2 représente l'accélération du fluide sur l'axe ($y=0$, $v^{(1)}=0$) pour 3 valeur de δ ($\delta = 0\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0{,}2$) et pour $R_m = 0$; l'intervalle des valeurs de x considéré correspondant approximativement à la longueur de l'accélérateur. On voit que $u^{(1)}$ est

une fonction décroissante de δ à variation faible: l'effet de la hauteur du canal sur l'accélération est donc peu important.

Pour $R_m \neq 0$, l'accélération est très légèrement diminuée: dans les conditions présentes avec $R_m = 0,3$ et dans l'intervalle de x considéré, cette diminution ne dépasse pas 5.10^{-4}.

A la paroi, $(y = \pm 1)$, la vitesse est légèrement plus grande que sur l'axe; ainsi pour $\delta = 0,1$, l'augmentation est de l'ordre de 3.10^{-3}.

4. La figure 3 représente l'évolution du débit massique de perturbation $(u^{(1)} + M_0 \rho^{(1)})$ à la paroi $(y = \pm 1)$ et sur l'axe $(y = 0)$, pour $R_m = 0$ et $R_m = 0,3$ dans le cas $\delta = 0,1$. Ces courbes montrent que le fluide a tendance à être rapproché de l'axe du canal, d'où un effet de confinement qui apparaît même si $R_m = 0$. Dans ce dernier cas, la force électromagnétique qui devient purement axiale, est plus importante aux parois que sur l'axe; l'accélération du fluide est alors plus importante à la paroi, par contre, $\rho^{(1)}$ décroît si rapidement que le groupement $(u^{(1)} + M_0 \rho^{(1)})$ est une fonction de x négative et décroissante pour $y = \pm 1$; alors qu'elle est positive et croissante pour $y = 0$. Plus généralement, l'effet de confinement est augmenté si R_m ou δ le sont.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus en ([4]) dans le cas d'une force électromagnétique quelque peu différente.

5. De meme que dans l'étude linéarisée de l'approximation unidimensionnelle ([1]), la solution des équations (1)-(3) représente l'écoulement tant que x est suffisamment faible pour que le terme $R_m P \varphi^{(1)}$ soit petit devant φ_0.

(1) R. PEYRET et TH. MOULIN, Comptes rendus, 259, 1964, p. 1810.

(2) R. PEYRET, Comptes rendus, 259, 1964, p. 2592.

(3) la signification des lettres et symboles est identique à celle de (1).

(4) J. FABRI et TH. MOULIN, 11th Internat. Congr. Appl. Mech., Munich 1964.

(Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology,
Pasadena, California)

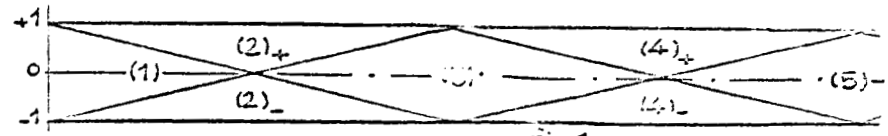

fig.1

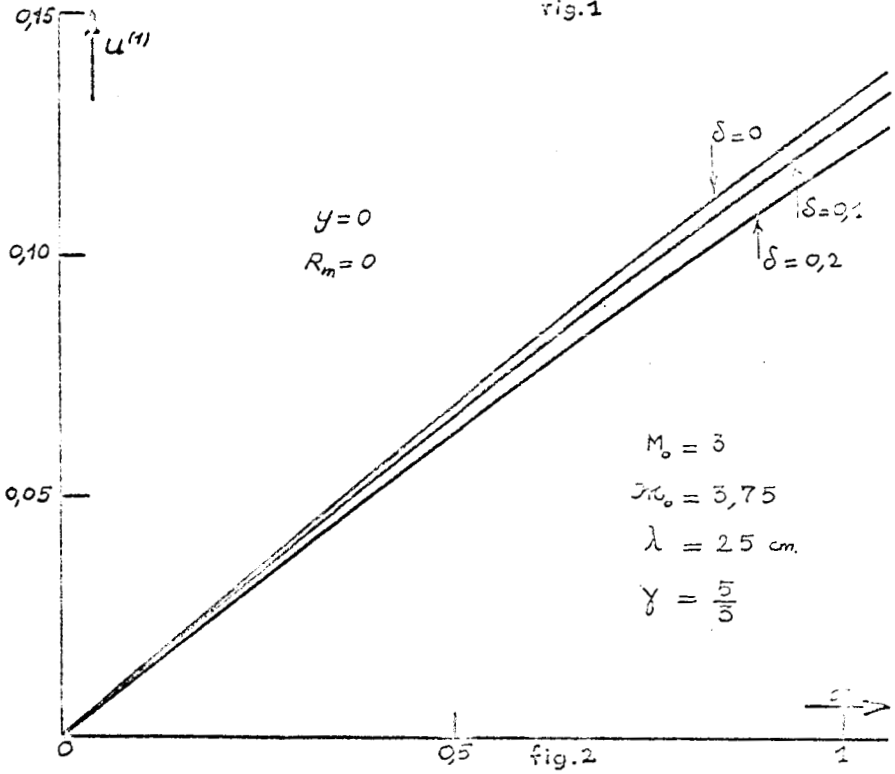

fig.2

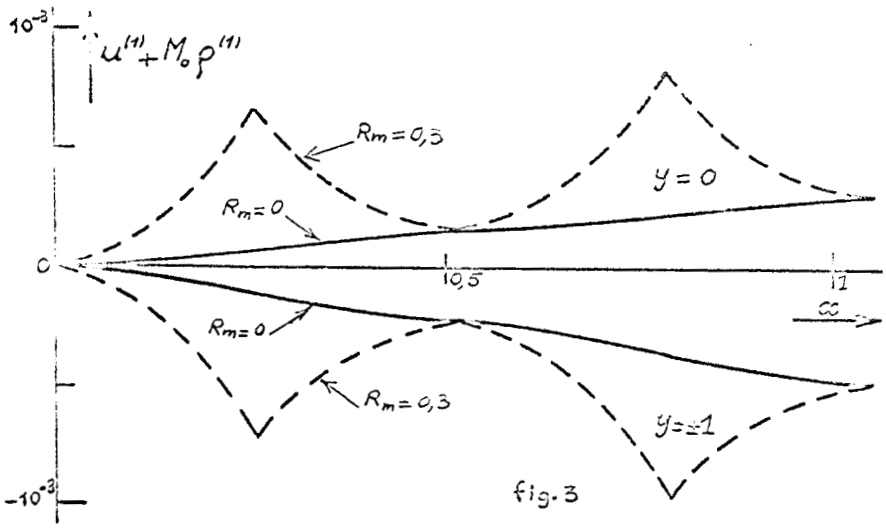

fig.3