NASA TT F-10,488

NASA TT F-10,488

STABILITY OF SYSTEMS WITH DELAY

GPO PRICE $ _____

CFSTI PRICE(S) $ _____

Hard copy (HC) 3.00

Microfiche (MF) .65

ff 653 July 65

S. N. Shimanov

Translation of "Ustoychivost' sistem s zapazdyvaniyem"
IN: Analiticheskaya Mekhanika, Ustoychivost' Dvizheniya, Nebesnaya Ballistika; Izd-vo Nauka, Moscow, pp. 170-180, 1965
Paper presented at 2nd All-Union Conference on Theoretical and Applied Mechanics,
Moscow, January 29-February 5, 1964

N67-15695
(ACCESSION NUMBER)
16
(PAGES)
(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)
(THRU)
1
(CODE)
23
(CATEGORY)
FACILITY FORM 602

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON DECEMBER 1966

NASA TT F-10,488

STABILITY OF SYSTEMS WITH DELAY

S. N. Shimanov

ABSTRACT

The article surveys work dealing with the stability of motion of systems described by differential equations with an aftereffect or time delay. The methods of investigating systems with an aftereffect (the method of Lyapunov functions, the universal method of Lyapunov functionals) are described, and an overall approach to the problem is outlined. A study is made of the theory of linear differential equations with an aftereffect. Certain new results of general nature concerning the theory of linear periodic systems with an aftereffect are cited. First-approximation stability is discussed, and a study is made of the stability of systems with an aftereffect in critical cases.

This report is devoted to a survey of works on the stability of /170* motion in systems described by differential equations with an aftereffect or time delay. We shall give our attention primarily to those works containing some generalization of the classical ideas in Lyapunov's stability theory for systems described by ordinary differential equations (refs. 1, 2, 3 and 4). In this class are the method of investigation using functionals, the general approach to examination of equations with delay in functional space, stability with respect to the first approximation, the theory of critical cases, and the theory of stability of linear and nonlinear periodic systems. The references in this report are basically published works by Soviet and foreign authors, as well as some new data of a general nature pertaining to the theory of stability of periodic systems.

It should be noted that interest in development of the theory of systems with delay, and particularly in the theory of stability of systems with delay, is due not only to an effort to extend Lyapunov's methods to more and more general research topics, but is also the result of practical problems. As is

*Numbers given in margin indicate pagination in original foreign text.

generally known, there are elements with time delay in automatic control systems. Delay may take place in the controlled element, the controlling unit or in feedback. Delay takes place in servosystems when there is a remote communication line. Finally, differential equations with delay are a convenient tool in mechanical and electrical systems with distributed elements or with elements which have a large number of degrees of freedom. Differential equations with an aftereffect have recently found application in control theory where an uncontrolled system of ordinary differential equations becomes a controlled system if it is capable of accumulating information over a certain time interval. The motion of this type of system is described by a system with aftereffect.

Thus development of the theory of systems with delay, and in particular of the theory of stability, is dictated by practical problems.

1. Methods of Investigation. A General Approach to the Problem

Let us consider a general system of differential equations with aftereffect of the form

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\vartheta)\, d\eta_{ij}(\vartheta) + X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \quad (i=1, \ldots n), \tag{1.1}$$

where the integrals are Stieltjes integrals (ref. 4, p. 159), $\eta_{ij}(\vartheta)$ /171 are functions of limited variation, $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, X_n(\vartheta))$ are nonlinear functionals which are defined on piecewise continuous functions $x_i(\vartheta)$ of the argument ϑ which varies over the range $\tau \leq \vartheta \leq 0$ and are nonlinear perturbations

More precisely, X_i satisfy Lipshits conditions with respect to x_i

$$\begin{gathered} |X_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta)) - X_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta)| \leqslant L\|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|_\tau, \\ \|x(\vartheta)\|_\tau = \sup\{|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}, \\ L = L_1\{\|x''(\vartheta)\|_\tau + \|x'(\vartheta)\|_\tau\}^{\alpha_1}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

here L_1 and α_1 are positive numbers, $X_i(0, \ldots, 0) = 0$.

The motion $x = 0$ we shall call undisturbed motion of system (1.1). Definitions of stability, asymptotic stability, and instability of the undisturbed motion are given in the usual manner using the norm $\|x(\vartheta)\|_\tau$.

As is generally known, Lyapunov's second method (or the method of Lyapunov functions) is the fundamental method for solving problems in stability. The first steps toward transferring this method to systems with delay were not very productive (ref. 5).

A more effective method was the method of Lyapunov functions in which the derivative functional must give a definite negativity on a narrower set of curves which satisfy some additional conditon (refs. 6 and 7). A basic disadvantage in applying Lyapunov functions to studying the stability of systems with delay is their nonuniversality, the irreversibility of theorems on stability and asymptotic stability.

The characteristics of equations with time delay or more general differential equations with aftereffect were first taken into account by replacing Lyapunov functions with Lyapunov functionals defined in some functional space, e.g., C (the space of continuous functions). In this regard, the theorems of Lyapunov's second method were found to be a universal means of investigation in examining solutions in a functional space of continuous functions, since they are reversible (ref. 4).

The universal method of Lyapunov "functionals" made it possible to derive a number of extremely important theoretical results on stability of systems with aftereffect (ref. 4). Differential equations with time delay (with aftereffect) are functional equations since they determine derivatives of unknown quantities with respect to time x_s (t) at a moment of time t as a function not only of these quantities computed for the moment t, but also of these quantities computed to the moment of time $t-\tau_j$, for preceding moments t on the delay range $[t-\tau,t]$ (derivatives with respect to time of the quantities x_s (t) are functionals on the range $x_s(t+\vartheta), -\tau \le \vartheta \le 0$, τ is the delay). Therefore it is natural to take the range of the integral trajectory of the system with delay as an element of the solution, and to consider the solution itself in the space of continuous functions C $[-\tau,0]$, $x_i(\vartheta)$, $i = 1, \ldots, n$, $-\tau \le \vartheta \le 0$ with the norm $\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup(|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \le \vartheta \le 0)$.

This approach to systems with delay was proposed in references 4 and 8.

Thus we shall take as an element of solution for the system (1.1) not the vector-function of time $x(x_0(\vartheta), t_0, t)$, but the vector-segment of the trajectory $x(x_0(\vartheta), t_0\ t+\vartheta)$, $-\tau \le \vartheta \le 0$. If the first derivative with /172 respect to time t is calculated from $x(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, t when $\vartheta < 0$, then we find

$$\frac{dx_s(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)}{dt} = \frac{dx_s(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)}{d\vartheta};$$

$$\Delta t \to +0, \quad -\tau \leqslant \vartheta < 0.$$

Therefore the system of equations (1.1) in functional space will have a corresponding equivalent system of "ordinary differential equations" with an operational right-hand member (ref. 4, p. 162; ref. 8)

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)), \tag{1.2}$$

where

$$x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_i(t+\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\},$$

$$Ax(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} x_j(\vartheta)\, d\eta_{kj}(\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$R(x(\vartheta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ x_k(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

The fact that A is an unrestricted linear operator does not interfere with the use of system (1.2) as a convenient working tool for study. The given approach to differential equations with aftereffect (delay) and the method of functionals were effective means for studying systems with delay resulting in considerable progress in the theory of stability for systems of this type (refs. 4 and 8).

As an example of the use of this approach, let us consider in more detail some additions to the theory of linear stationary equations with aftereffect.

2. On the Theory of Linear Differential Equations with Aftereffect

Let us consider a system of linear differential equations with aftereffect of the form

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_i(t+\vartheta)\, d\eta_{si}(\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

where the integrals in the right-hand member, as in system (1.1), are Stieltjes integrals, $\eta_{si}(\vartheta)$ are functions with limited variation. A particular case of systems (2.1) is a system with delay of the form

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (a_{si}x_i(t) + b_{si}x_i(t-\tau)) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

The latter is obtained from system (2.1) when $\eta_{sj}(0) = a_{sj}$, $\eta_{sj}(-\tau) = b_{sj}$, $\eta_{sj}(\vartheta) = 0$, $-\tau < \vartheta < 0$. Linear equations with aftereffect are studied in detail in reference 9.

For system (2.1), the equivalent system of "ordinary differential equations" with an operational right-hand member is /173

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta), \tag{2.3}$$

where the operator A is given by formula (1.3). Operator A for system (2.2) has the form $Ax(\vartheta) = dx_k(\vartheta)/d\vartheta$ when $-\tau \le \vartheta \le 0$, $ax(0) + bx(-\tau)$ when $\vartheta = 0$.

In addition to system (2.3) let us consider the conjugate system (refs. 10, 11 and 12)

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -A^* y_t(\vartheta), \tag{2.4}$$

where

$$y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_l(t+\vartheta),\ \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0\};$$

$$-A^* y(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & \tau > \vartheta > 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\tau}^{0} y_j(\vartheta)\, d\eta_{jk}(-\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

The conjugate operator -A* for system (2.2) is given by the formula

$$-A^* y(\vartheta) = \left\{ \frac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta},\ \tau > \vartheta > 0,\ \ -a'y(0) - b'y(\tau) \text{ when } \vartheta = 0 \right\}$$

System (2.4) corresponds to a system of differential equations with a lead in time of the form

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{0} y_j(t+\vartheta)\, d\eta_{js}(-\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

The spectrum of operator A consists of the eigenvalues λ_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$); roots of the characteristic equation

$$\Delta(\lambda) = \left| -E\lambda + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta(\vartheta) \right| = 0. \tag{2.7}$$

The eigenvalues of the operator -A* satisfy the relationship $\mu\sigma = -\lambda\sigma$, ($\sigma = 1, 2, \ldots$).

Let us set up a scalar product of two vectors:

$$x(\vartheta)\ (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \text{ and } y(\vartheta)\ (\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0):$$

$$(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) - \sum_{l,j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{\xi}^{0} x_l(\vartheta)\, y_j(\xi + \vartheta)\, d\xi \right] d\eta_{jl}(\vartheta). \tag{2.8}$$

Direct computation establishes the validity of the identity

$$(Ax(\vartheta), y(\vartheta)) = (x(\vartheta), -A^* y(\vartheta)) \tag{2.9}$$

for any elements $x(\vartheta)$ and $y(\vartheta)$.

Thus it follows that for any solution of system (2.4) which is continued toward increasing time t, the expression /174

$$(x(\vartheta),\ \ y(t+\vartheta)) = C \tag{2.10}$$

will be the first integral in system (2.3). So here we have an analogy with the theory of ordinary linear differential equations with constant coefficients.

There is an integer such that the multiplicity of any root of characteristic equation (2.7) is less than n_0. Let λ_j be the root of characteristic equation (2.7). Then the equations

$$(A-\lambda_j I)^{n_0} x(\vartheta) = 0,\quad (-A^* - \lambda_j I)^{n_0} y(\vartheta) = 0 \tag{2.11}$$

(where I is the identity element, I x (ϑ) = x (ϑ)) have an equal number of linear independent nontrivial solutions--the root elements x_j (ϑ) of operator A and the root elements y_j (ϑ) of operator -A*. The solutions of equations (2.11) at $n_0 = 1$ are called characteristic elements, while all other root elements are called adjoint elements. Let the set of root elements of operator A for the roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ be x_1 (ϑ), ..., x_n (ϑ) and let the set of root elements for the operator -A* corresponding to these roots be y_1 (ϑ), ..., y_n (ϑ). It may be shown that these elements may always be selected so that the conditions are fulfilled.

If x_j (ϑ) is a characteristic element of operator A with no corresponding adjoint elements, then we have the conditions

$$(x_j(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = \begin{cases} 1, & j=\sigma \\ 0, & j\neq\sigma. \end{cases} \tag{2.12}$$

If the elements x_j (ϑ), x_{j+1} (ϑ), ..., x_{j+m} (ϑ) make up a Jordan form (x_j (ϑ) is a characteristic element and x_{j+1} (ϑ), ..., x_{j+m} (ϑ) are adjoint elements) then the conjugate operator has a corresponding Jordan form y_j (ϑ), ..., y_{j+m} (ϑ) and we have the conditions:

$$\begin{gathered}(x_{j+k}(\vartheta),\ y_{j+m-\sigma}(\vartheta)) = \begin{cases} 1 & \sigma=k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m \\ 0 & \sigma\neq k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m, \end{cases} \\ (x_{j+k}(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = 0 \quad (\sigma<j,\ \sigma>j+m); \end{gathered} \tag{2.13}$$

and

$$\begin{gathered}(A-\lambda_j I)\,x_j(\vartheta) = 0 \\ (A-\lambda_j I)\,x_{j+k}(\vartheta) = x_{j+k-1}(\vartheta) \quad (k=1,\ldots,m). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Let us assume that $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are all roots of the characteristic equation (2.7) satisfying the condition Re $\lambda_j \leq -a$, (j = 1, ..., N) where α is

some positive number. Here λ_j is taken as many times as its multiplicity. Let us write $N = N(\alpha)$ functionals

$$f_j(x(\vartheta)) = (x(\vartheta), y_j(\vartheta)) \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{2.15}$$

The conditions

$$f_j(x(\vartheta)) = 0, \quad (j = 1, \ldots, N) \tag{2.16}$$

determine the subspace $\Pi(\alpha)$ in the space $C[-\tau, 0]$. An arbitrary element $x(\vartheta)$ of the space $C[-\tau, 0]$ may be represented in the form /175

$$x(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{N} y_\sigma \cdot x_\sigma(\vartheta) + z(\vartheta), \tag{2.17}$$

where

$$y_\sigma = f_\sigma(x(\vartheta)), \tag{2.18}$$

if case (2.12) takes place, and

$$y_{\sigma+k} = f_{\sigma+m-k}(x(\vartheta)) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{2.19}$$

if case (2.13) takes place.

In terms of the new variables $y_1, \ldots, y_n$ and $Z(\vartheta)$, system of equations (2.3) has the form

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j, \\ \frac{dy_{j+m}}{dt} &= \lambda_j y_{j+m}, \\ \frac{dy_{j+m-1}}{dt} &= \lambda_j y_{j+m-1} - y_{j+m}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j - y_{j+1}; \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta), \quad z_t(\vartheta) \in \Pi(\alpha). \tag{2.21}$$

The spectrum of operator A on $\Pi(\alpha)$ consists of the eigenvalues $\lambda_\sigma (\sigma = N + 1, \ldots)$ with the exception of the first N: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$.

3. The Theory of Linear Periodic Systems with Aftereffect.

Let us consider systems whose motion is described by differential equations with periodic coefficients and aftereffect of the form

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(t, x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

where

$$F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ p_{sj}(t)\, x_j(0) + \sum_{\sigma=1}^{K} q_{\sigma sj}(t)\, x_j(-\tau_\sigma) + \int_{-\tau}^{0} f_{sj}(t, \xi)\, d\xi \Big\}, \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Here ρsj, $q\sigma, sj$ are periodic and continuous functions of time t of period ω, the functions $f_{sj}(t, \xi)$ are continuous with respect to t and ξ in the region

$-\tau \le \xi \le 0$, $-\infty < t < +\infty$, with respect to t they are periodic with period ω, $\tau \le \tau_\sigma$ - 3a is the delay in the system.

Systems of this type were considered in references 13, 14, 15, 16 and 17. In the space of continuous functions C $[-\tau, 0]$ with the previously given norm of $\| x(\vartheta) \|$, equations (3.1) have an equivalent system of ordinary differential equations with an operational right-hand member of the form

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = P(t)\, x_t(\vartheta), \tag{3.2}$$

where $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = x_s(t+\vartheta)$, $-\tau \le \vartheta \le 0$, $s = 1, \ldots, n$, and the operator P(t) is /176

$$P(t)\, x(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_s(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Let $x(x_0(\vartheta), t_0, t)$ be a solution for system (3.1) with the initial function $x_0(\vartheta)$ at the moment of time t_0, $x(x_0(\vartheta), t_0, t_0+\vartheta) = x_0(\vartheta)$. then $x_t(\vartheta) = x(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $-\tau \le \vartheta \le 0$ determines the solution of system (3.2) with initial function $x_0(\vartheta)$. When t is fixed, element $x_t(\vartheta)$ of this solution may be considered as the image of the initial element $x_0(\vartheta)$ for the mapping

$$x_t(\vartheta) = T(t, t_0)\, x_0(\vartheta), \tag{3.4}$$

where $T(t, t_0)$ is a linear operator, $T(t_0, t_0) = I$.

It is shown that the eigenvalues of the completely continuous operator $T(t_0+\omega, t_0)$ are independent of t_0. The spectral radius r_t of operator $T(t_0+\omega, t_0)$ determines the stability or instability of motion x = 0. If r_t

is greater than one, then the motion x = 0 of system (3.1) is unstable. If r_t is less than one, then the motion x = 0 is asymptotically stable. An analytical form of the characteristic and adjoint elements of the operator is derived. The partial solutions of (3.1) corresponding to these elements are continuous over the entire time axis and have the same analytical form. For instance the eigenvector $x_\sigma(\vartheta)$ corresponding to the eigenvalue ρ_σ has the form

$$x_\sigma(\vartheta) = \rho_\sigma^{\vartheta/\omega}\Phi_\sigma(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, \tag{3.5}$$

where $\Phi_\sigma(\vartheta)$ is a periodic vector of period ω when the parameter ϑ is varied over the range $(-\infty, +\infty)$. $\Phi_\sigma(\vartheta)$ have derivatives with respect to ϑ of any arbitrarily high order.

Let us consider a conjugate system of differential equations with a lead in time (refs. 16 and 17)

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -F_s^*(t, y_1(t+\vartheta), \ldots, y_n(t+\vartheta)), \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{3.6}$$

where

$$-F_s^*(t, y_1(\vartheta), \ldots, y_n(\vartheta)) = -\sum_{j=1}^{n} p_{js}(t)\, y_j(0) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{k} q_{\sigma js}(t+\tau_\sigma)\, y(\tau_\sigma) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} f_{js}(t-\xi, \xi)\, y_j(-\xi)\, d\xi. \ (s = 1, \ldots, n).$$

Here p, q and f are the same as in (3.1). In the functional space C $[-\tau, 0]$ equations (3.6) have an equivalent system of linear ordinary differential equations with an operational right-hand member of the form (ref. 16)

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -P^*(t)\, y_t(\vartheta), \tag{3.7}$$

where

$$y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_s(t+\vartheta), \quad \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0, \quad s = 1, \ldots, n\},$$

$$-P^* y(\vartheta) = \left\{\frac{dy_s(\vartheta)}{d\vartheta} \text{ for } \tau \geqslant \vartheta > 0, \ F^*(t, y(\vartheta)) \text{ for } \vartheta = 0\right\}.$$

Let us use the symbol $y(y_0(\vartheta), t_0, t)$ to designate the solution for system (3.6) with initial function $y_0(\vartheta)$, $\tau \geq \vartheta \geq 0$ at the moment of time t_0 when $t \leq t_0$. Then $y_t(\vartheta) = y(y_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $\tau \geq \vartheta \geq 0$, is a solution of system (3.7). When t is fixed, element $y_t(\vartheta)$ of this solution may be considered as the image of element $y_0(\vartheta)$ for the mapping

$$y_t(\vartheta) = T^*(t, t_0)\, y_0(\vartheta), \quad t < t_0. \tag{3.8}$$

It is found that the eigenvalues of operator T^* $(t_0 - \omega, t_0)$ are independent of t_0 and coincide with the eigenvalues of operator T $(t_0 + \omega, t_0)$. The structure of the eigenvectors and adjoint vectors of operator T^* $(t_0 - \omega, t_0)$ coincides with that of analogous vectors for the operator T $(t_0 + \omega, t_0)$. The partial solutions corresponding to these elements are continuous not only in the direction $t < t_0$ but also when $t > t_0$.

Let us introduce the notation

$$\begin{aligned}(x(\vartheta), y(\vartheta), t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{k} \int_{-\tau}^{0} x_j(\xi + \tau) \cdot y_l(\xi)\, q_{\sigma jl}(t + \xi)\, d\xi - \\ - \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{-\vartheta}^{0} x_l^*(\xi + \vartheta)\, y_j(\xi)\, f_{jl}(t + \xi, \vartheta)\, d\xi \right] d\vartheta.\end{aligned} \tag{3.9}$$

For any partial solution $y_t(\vartheta)$ of system (3.9) which is continuous in the direction $t \geq t_0$, the expression

$$(x_t(\vartheta), y_t(\vartheta), t) = \text{const} \tag{3.10}$$

will be the first integral of system (3.2).

Let us assume that all eigenvalues ρ_j satisfying the condition $|\rho_j| \geq \epsilon$ (where ϵ is an arbitrary number) are simple and that the number of these eigenvalues is $N(\epsilon)$. The more general case is treated in a similar manner (ref. 16). Let us construct the eigenvectors $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$, $(j = 1, \ldots, N(\epsilon))$ of operators T $(t_0 + \omega, t_0)$, T^* $(t_0 - \omega, t_0)$. Let $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$ correspond to the eigenvalue ρ_j; then we fulfill the condition

$$(x_j(\vartheta), y_j(\vartheta), t_0) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{3.11}$$

Let $x_t^{(j)}(\vartheta)$ and $y_t^{(j)}(\vartheta)$ be partial solutions of systems (3.1) and (3.9) with initial functions (when $t = t_0$) $x_j(\vartheta)$ and $y_j(\vartheta)$ respectively. Any element $x(\vartheta)$ of space $C[-\tau,0]$ may be uniquely represented in the form of the sum

$$x(\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{-\frac{t-t_0}{\omega}} + z(\vartheta), \tag{3.12}$$

where

$$a_j = \left(x(\vartheta),\ y_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t\right) \quad (j = 1, \ldots, N), \tag{3.13}$$

$$\left(z(\vartheta),\ y_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t\right) = 0, \ (j = 1, \ldots, N). \tag{3.14}$$

Thus it is always possible to pass from a variable $x(\vartheta)$ in system (3.2) to scalar variables $a_1, \ldots, a_N$ and a variable $z(\vartheta)$ belonging to the subspace (3.14).

In the given variables, system of equations (3.2) has the corresponding system of equations /178

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{1}{\omega} \log \rho_j \cdot a_j \ (j = 1, \ldots, N); \tag{3.15}$$

$$\frac{dZ_t(\vartheta)}{dt} = P(t)\, z_t(\vartheta), \quad z_t(\vartheta) \in (3.16). \tag{3.16}$$

In this regard, (3.12) may be interpreted as follows. An N-dimensional base $x_j(t - t_0 + \vartheta) \cdot \rho_j^{-\frac{t-t_0}{\omega}}$ $(j = 1, \ldots, N)$ may always be denoted in the space $C[-\tau, 0]$ which is in periodic motion with period ω. The coordinates a_j which describe the motion of the system in the given N-dimensional subspace of the space $C[-\tau, 0]$ will correspond to a system of ordinary differential equations with constant coefficients (3.15). The component of motion $z_t(\vartheta)$ in (3.12) will belong to subspace (3.14) and will decrease without limit according to exponential law with an index $-\beta \leq \frac{1}{\omega} \log \varepsilon (\varepsilon < 1)$.

4. Stability with Respect to the First Approximation and Investigation of Stability in Critical Cases

Let us reconsider system (1.1) together with the so-called system of the first approximation (2.1) which is obtained from system (1.1) when $X_s \equiv 0$. It was shown in references 4 and 18 that when all roots of characteristic equation (2.7) have real negative parts, undisturbed motion $x = 0$ of systems (2.1) and (1.1) is asymptotically stable regardless of the form of the nonlinear

terms X_s in (1.1). In the case where at least one of the roots of equation (2.7) has a real positive part, undisturbed motion $x = 0$ of systems (2.1) and (1.1) is simultaneously unstable regardless of the form of the nonlinear terms X_s (ref. 10). Thus we have complete analogy with ordinary differential equations in the problem of stability with respect to the first approximation for the stationary system (1.1) with aftereffect. We should point out that this is also true for a nonlinear periodic system of the (1.1) type with a system of the first approximation of form (3.1). The first approximation on asymptotic stability is derived in references 4 and 19. The second approximation on instability is derived in the same way as in reference 10 on the basis of the division indicated in reference 16.

A so-called critical case occurs when the characteristic equation has zero or purely imaginary roots. The critical cases of a single zero root and a pair of purely imaginary roots for stationary systems of form (1.1) are considered in references 20.

Let us consider stability in the critical case of a single zero root $\lambda_1 = 0$ in more detail. It is assumed that all remaining roots of equation (2.7) have real negative parts. The method for solving the stability problem is a generalization of the Lyapunov method for systems described by ordinary differential equations. In the given case, $\Delta(0) = 0$, but $\Delta'(0) \neq 0$. Let us use the notation $\Delta_{kj}(0)$ to designate the cofactor of the element standing at the intersection of the k-th row and the j-th column in the determinant of $\Delta(0)$ for (2.7). Let $\Delta_{k_1 l_1}(0) \neq 0$, $y_1(\vartheta) = \{\Delta_{fk_1}(0),\ j = 1, \ldots, n,\ \tau \geq \vartheta \geq 0\} = \text{const}$. Let us note functional $f(x(\vartheta)) = (x(\vartheta), y_1(\vartheta))$. And let us consider the vector $x_1(\vartheta)$ in $C[-t, 0]$

$$x_1(\vartheta) = \{\Delta_{l_1,j}(0)\}(\Delta_{l_1k_1}(0)\Delta'(0))^{-1} = \text{const}(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0. \tag{4.1}$$

An arbitrary element $x(\vartheta) \in C[-\tau, 0]$ may be uniquely represented as

$$x(\vartheta) = x_1(\vartheta)y + z(\vartheta). \tag{4.2}$$ /179

Equation (2.3) assumes the form

$$\begin{gathered} dy/dt = 0, \\ dz_t(\vartheta)/dt = Az_t(\vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

At the same time system (1.2) assumes the form:

$$dy/dt = Y(y, z(\vartheta)),$$
$$dz_t(\vartheta)/dt = Az_t(\vartheta) + Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0. \tag{4.4}$$

Here Y (y, z (ϑ)) is a functional given by the formula Y (y, z (ϑ)) = f [R] and the operator

$$Z(y, z(\vartheta), \vartheta) = R(x_1(\vartheta)y + z(\vartheta)) - x_1(\vartheta)Y(y, z(\vartheta)). \tag{4.5}$$

Let us consider the functions

$$Y(y, 0) = gy^m + \ldots, Z(y, 0, \vartheta) = g_1(\vartheta)y^{m_1} + \ldots \tag{4.6}$$

Let $m_1 > m$. Then, if m is an odd number and $g < 0$, the motion $x = 0$ is asymptotically stable. If m is an even or an odd number, but $g > 0$, then the motion $x = 0$ is unstable.

The condition $m_1 > m$ may be fulfilled if we make the substitution $z(\vartheta) = z_1 + u(\vartheta, y)$ where $u(\vartheta, y)$ is a solution of the equation

$$Au(\vartheta, y) + Z(y, u(\vartheta, y), \vartheta) = 0, \tag{4.7}$$

Which satisfies the condition f [u (ϑ, y)] = 0. In plane f [x (ϑ)] = 0, equation (4.7) has a unique solution $u(\vartheta, y)$ which is analytic with respect to y and differentiable with respect to ϑ.

A conversion of this type always ensures the condition $m_1 > m$ provided this is not the special case where Y (y, u (ϑ, y), ϑ) $\equiv$ 0. In this case, the undisturbed motion $x = 0$ is stable (ref. 20).

REFERENCES

1. Lyapunov, A. M. Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya. (General Problem of Motion Stability) Khar'kov, 1922, Moscow, Gostekhizdat, 1950.

2. Chetayev, N. G. Ustoychivost' dvizheniya. (Motion Stability) Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1946, 1952.

3. Malkin, I. G. Teoriya ustoychivosti dvizheniya. (Theory of Motion Stability) Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1952.

4. Krasovskiy, N. N. Nekotoryye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya. (Some Problems in the Theory of Motion Stability) Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1959.

5. El'sgol'ts, L. E. Kachestvennyye metody v matematicheskom analize. (Qualitative Methods in Mathematical Analysis) Moscow, Gostekhizdat, 1955.

6. Razumikhin, B. S. Ustoychivost' po pervomu priblizheniyu sistem s zapazdyvaniyem. (Stability with Respect to the First Approximation of Systems with Delay) (PMM) Vol. 22, No. 2, 1956.

7. --- Primeneniye metoda Lyapunova k zadacham ustoychivosti system s zapazdyvaniyem. (Application of Lyapunova's Methods to Problems of Stability in Systems with Delay) Avtomatika i Tlemekhanika, Vol. 21, No. 6, 1960.

8. Krasovskiy, N. N. Ob ustoychivosti kvazilineynykh sistem s posledeystviyem. (Stability of Quasilinear Systems with Aftereffect) Doklady AN SSSR, Vol. 119, No. 3, 1958.

9. Myshkis, A. D. Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s zapazdyvayushchim [illegible] Differential Equations with a Delayed Argument) [illegible]

$Au(\theta \longrightarrow y) + Z(y, u$

10. Shimanov, S. N. O neustoychivosti dvizheniya sistem s zapazdyvaniyem po vrememi. (Motion In_stability of Systems with Time Delay) PMM, Vol. 24, No. 1, 1960.

11. --- Nekotoryye zadachi teorii ustoychivosti i kolebaniy sistem s zapazdyvaniyem. (Some Problems in the Theory of Stability and Oscillations of Systems with Delay) Dissertation, Institut Mekhaniki AN SSSR, Moscow, 1963.

12. Hale, I. K. Linear functional-differential equations with constant coefficients.--Techn. rep., N 63-66, March, RIAS, 1963.

13. Zverkin, A. M. K teorii lineynykh differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom i s periodicheskimi koeffitsiyentami. (Theory of Linear Differential Equations with a Delayed Argument and with Periodic Arguments) Doklady AN SSSR, Vol. 128, 1959.

14. Hahn, W. On difference-differential equations with periodic coefficients. - J. Math. Ann. and Appl. 3, 70-101, 1961.

15. Stokes, A. A. Floquet Theory for Functional Differential Equations. Proc. Math. Acad. Sci. U. S. A. 48, 1962.

16. Shimanov, S. N. K teorii lineynykh differentsial'nykh uravneniy s periodicheskimi koeffitsiyentami i zapazdyvaniyem vremeni. (Theory of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Time Delay) PMM, Vol. 27, No. 3, pp. 450-458, 1963.

17. Halanay, A. Teoria calitativa a opuatiiler diferentiale. (Qualitative Theory of Differential Equations) Editura Academiai Republicii Populare Romine, 1963.

18. Bellman, R. and Cooke, K. Differential-difference equations. Academic Press, 1963.

19. Bellman, R. On the existence and boundedness of solutions of non-linear differential-difference equations.--Ann. Math., pp. 50 No. 2, 1940.

20. Shimanov, S. N. a: Ob ustoychivosti v kriticheskom sluchaye odnogo nulevogo kornya dlya sistem s posledeystviyem. (Stability in the Critical Case of a Single Zero Root for Systems with Aftereffect) PMM, Vol. 24, No. 3, 1960; b: Matematika (Izvestiya VUZov) No. 1, (20), 1961; c: Kriticheskiy sluchay pary chisto mnimykh korney dlya sistem s posledeystviyem. (Critical Case of a Pair of Purely Imaginary Roots for Systems with Aftereffect) Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal, Vol. 2, No. 3, 1961; d: Kriticheskiy sluchay pary chisto mnimykh korney dlya sistem s posledeystviyem; Osobyy sluchay. (Critical Case of a Pair of Purely Imaginary Roots for Systems with Aftereffect (Special Case) Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal, Vol. 4, No. 2, 1963; e: PMM, Vol. 25, No. 6, 1961.

21. Pinny, E. Obyknovennyye differentsial'no-raznostnyye uravneniya. (Ordinary Differential-Difference Equations) Moscow, Inostrannaya Literatura (I. L.), 1961.

22. Ryabov, Yu. A. Primeneniye metoda malogo parametra lyapunova-puankare v teorii sistem s zapazdyvaniyem. (Application of the Lyapunov-Poincaré Small-parameter Method in the Theory of Systems with Delay) Inzhenernyy Zhurnal, Vol. 1, No. 2, 1961.

23. --- Primeneniye metoda malogo parametra k issledovaniyu sistem avtomaticheskogo regulirovaniya s zapazdyvaniyem. (Application of the Small-parameter Method to Investigation of Automatic Control Systems with Delay) Avtomatika i Telemekhanika, Vol. 21, No. 6, 1960.

this is an 80% blowback

A66-29156 #

STABILITY OF SYSTEMS WITH DELAY [USTO [illegible] EM S [illegible] LDYVANIEM].

S. N. Shimanov.

IN: ANALYTICAL MECHANICS, STABILITY OF MOTION [illegible] LES-TIAL BALLISTICS; ALL-UNION CONFERENCE ON THEORETICAL AND APPLIED [illegible], 2ND, [illegible] COW, USSR, JANUARY 29-F[illegible] [illegible] ANALITICA [illegible] MEKHA-N[illegible] [illegible] D [illegible] NEBES[illegible] [illegible] ISTIKA; V[illegible] [illegible] TEORET[illegible] ESKO[illegible] [illegible] MEKHA-NI[illegible], MOSCOW, USSR, JANUARY 29-[illegible]

TR[illegible] (A66-29112-15-2[illegible])

E[illegible] [illegible] I. Seapu.

Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 196[illegible], p. 170-18[illegible] [illegible] sian: [illegible] survey of work dealing with the stability [illegible] [illegible] ms de-s[illegible] by differential equations with an after[illegible] of time delay. T[illegible] methods of investigating systems with an aftereffect (the method of L[illegible] fonc[illegible] the [illegible] method of L[illegible]nov functionals) a[illegible] [illegible] an overall approach to the [illegible] is outlined. A[illegible] is made of the theory of linear differential equations with an af[illegible] [illegible]ct. Certain new results of general nature concerning the th[illegible] of linear per[illegible] [illegible] an after[illegible]ect are cited. F[illegible]-approximation [illegible] is dis[illegible]ed, a[illegible] study is made of th[illegible] [illegible]bility of sys[illegible] [illegible] an [illegible]ct in [illegible] cases.

A. B. K.

This A[illegible] Publi[illegible]
INTERNATIONAL [illegible] SPAC[illegible] [illegible]ACTS
[illegible] by
TECH[illegible] [illegible] ATIO[illegible] [illegible]
[illegible]CAN INSTITU[illegible] [illegible] AERO[illegible]UTICS [illegible] [illegible]RONAUTICS, INC.
750 TH[illegible] [illegible]ENUE, NEW YO[illegible] [illegible] 10017

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Н. Шиманов

Доклад посвящен обзору работ по устойчивости движения систем, описываемых дифференциальными уравнениями с последействием или запаздыванием по времени. При этом мы останавливаемся в основном [illegible] работах, в которых в той или иной мере нашли обобщение известные [illegible]ческие факты теории устойчивости по Ляпунову для систем, [illegible] обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 2, 3, 4]. Сюда относятся метод исследования при помощи функционалов, общий подход к рассмотрению уравнений с запаздыванием в функциональном пространстве, устойчивость по первому приближению, теория критических случаев, теория устойчивости линейных и нелинейных периодических систем. В докладе в основном использованы опубликованные работы советских и зарубежных авторов, а также содержатся некоторые новые результаты [illegible] характера, касающиеся теории устойчивости периодических систем.

Следует отметить, что интерес к развитию теории систем с [illegible]нием и, в частности, к теории устойчивости систем с запаздыванием [illegible] не только стремлением к распространению [illegible] Ляпунова [illegible] более и более [illegible] объекты исследования, [illegible] практики. [illegible]но, что в системах автоматического регулирования [illegible] звенья с запаздыванием по времени. Запаздывание может [illegible] в объекте регулирования, управляющем [illegible], в обратной [illegible] место в следящих [illegible] при наличии дальних [illegible] механических [illegible]ских системах [illegible] запаздывания [illegible] удобным аппаратом в том случае, когда [illegible] системы имеют [illegible] элементы или [illegible] с большим [illegible] степеней свободы [illegible] время дифференциальные уравнения [illegible] действием нашли [illegible] применение в теории управления, когда [illegible] управляемая система [illegible] дифференциальных уравнений оказывается управляемой в случае, если она способна накапливать [illegible] на некотором отрезке времени [illegible] этом движение такой системы будет описываться система с последействием.

Таким образом, развитие теории систем с запаздыванием и, в частности, теории устойчивости обусловлено запросами практики.

1. Методы исследования. Общий подход к задаче

Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений с последействием [illegible]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{1}{\ldots}\int_{-\tau}^{0} x_j(t+\theta)\,d\eta_{ij}(\theta) + X_i(x_1(t+\theta),\ldots,x_n(t+\theta),\ldots,\ldots n), \tag{1.1}$$

[illegible] интегралы понимаются в смысле Стилтьеса [4, стр. 159], $\eta_{ij}(\vartheta)$ — функции ограниченной вариации, $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta))$ — нелинейные функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $\{x_i(\vartheta)\}$ аргумента ϑ, который меняется в пределах $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, и представляют собою нелинейные возмущения.

Точнее X_i удовлетворяют условиям Липшица по x_i

$$|X_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta)) - X_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta))| \leqslant L\|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|_\tau,$$
$$\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup\{|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}, \tag{1.2}$$
$$L = L_1\{\|x''(\vartheta)\|_\tau + \|x'(\vartheta)\|_\tau\}^{\alpha_1}.$$

Здесь L_1, α_1 — положительные числа, $X_i(0, \ldots, 0) = 0$.

Движение $x = 0$ будем называть невозмущенным движением системы (1.1). Определения устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости невозмущенного движения даются обычным образом при помощи нормы $\|x(\vartheta)\|_\tau$.

Известно, что второй метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) является основным методом решения задач устойчивости. Первые шаги в направлении перенесения этого метода на системы с запаздыванием оказались малоплодотворными [5].

Более эффективным оказался метод функций Ляпунова, в котором к производному функционалу предъявляется требование определенной отрицательности на более узком множестве кривых, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию [6, 7]. Основным недостатком приложения функций Ляпунова к исследованию устойчивости систем с запаздыванием является их неуниверсальность, необратимость теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Специфика уравнений с запаздыванием по времени или более общих дифференциальных уравнений с последействием впервые была учтена путем замены функций Ляпунова функционалами Ляпунова, определенными в некотором функциональном пространстве, например, C (пространстве непрерывных функций). При этом теоремы второго метода Ляпунова при рассмотрении решений в функциональном пространстве непрерывных функций оказались универсальным средством исследования, [illegible] они обратимы [4].

Универсальный метод «функционалов» Ляпунова позволил получить [illegible] очень важных принципиальных результатов по устойчивости систем с последействием [4]. Дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени (с последействием) являются функциональными уравнениями, так как они определяют в момент времени t производные по времени от искомых величин $x_i(t)$ как функции не только этих величин, подсчитанных для момента t, но и этих величин, подсчитанных в момент времени $t - \tau_j$, для предшествующих моментов t на отрезке запаздывания $[t - \tau, t]$ (производные по времени от [illegible] $x_i(t)$ являются функционалами на отрезке $\{x_i(t + \vartheta), -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$, τ — [illegible]). Поэтому в качестве элемента решения естественно принять отрезок интегральной траектории системы с запаздыванием, и само решение при этом рассматривать в пространстве непрерывных функций $C[-\tau, 0]$, $x(\vartheta) = \{x_i(\vartheta), i = 1, \ldots, n, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$ с нормой $\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup\{|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$.

Такой [illegible] к системам с запаздыванием был предложен в работах [4, 8].

Итак, [illegible] брать в качестве элемента решения системы (1.1) [illegible] функцию [illegible] $x(x_1, \ldots, x_n)$, а вектор — отрезок траектории [illegible] $t_0, t + \vartheta)$, [illegible] от $x(x_1, \ldots, x_n, t + \vartheta)$ вычислить [illegible]

производную по [illegible] < 0, то [illegible]

$$\frac{dx_s(t, t+\vartheta)}{dt} = \frac{dx_s(x_t(\vartheta), t, t+\vartheta)}{dt};$$

$$\Delta t \to +0, \quad -\tau \leqslant \vartheta < 0.$$

Поэтому системе уравнений (1.1) в функциональном пространстве будет соответствовать эквивалентная система «[illegible] дифференциальных уравнений» с операторной правой частью [4, стр. [illegible]2], [8]

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)) \tag{1.2}$$

где

$$x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_t(t+\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\},$$

$$Ax(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} x_j(\vartheta)\, d\eta_{kj}(\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$R(x(\vartheta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ x_k(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

То обстоятельство, что A — неограниченный линейный оператор, не мешает использованию системы (1.2) в качестве удобного рабочего аппарата исследования. Указанный подход к дифференциальным уравнениям с последействием (запаздыванием) и метод функционалов оказались эффективными средствами исследования систем с запаздыванием, позволившими существенно продвинуть теорию устойчивости для такого рода систем [4, 8].

В качестве примера использования этого подхода остановимся подробнее на некоторых дополнениях к теории линейных стационарных уравнений с последействием.

2. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с последействием вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} x_i(t+\vartheta)\, d\eta_{si}(\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где интегралы в правой части, как и в системе (1.1), понимаются в смысле Стилтьеса, $\eta_{si}(\vartheta)$ — функции с ограниченной вариацией. Частным случаем системы (2.1) будет система с запаздыванием вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (a_{si}x_i(t) + b_{si}x_i(t-\tau)) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Последняя получается из системы (2.1) при $\eta_{sj}(0) = a_{sj}$, $\eta_{sj}(-\tau) = b_{sj}$, $\eta_{sj}(\vartheta) = 0$, $-\tau < \vartheta < 0$. Линейные уравнения с последействием подробно изучены в книге [9].

Для системы (2.1) эквивалентной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью будет:

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta), \tag{2.3}$$

где оператор A определен формулой (1.3). Оператор A для системы (2.2) имеет вид $Ax(\vartheta) = \{dx_k(\vartheta)/d\vartheta$ при $-\tau \leqslant \vartheta < 0$, $ax(0) + bx(-\tau)$ при $\vartheta = 0\}$.

Рядом с системой (2.3) рассмотрим сопряженную систему [10, 11, 12]

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -A^* y_t(\vartheta), \tag{2.4}$$

где $y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_t(t+\vartheta), \tau > \vartheta > 0\}$;

$$-A^* y(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & \tau > \vartheta > 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\tau}^{0} y_j(\vartheta)\, d\eta_{jk}(-\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Для системы (2.2) сопряженный оператор $-A^*$ определяется формулой

$$-A^* y(\vartheta) = \left\{\frac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \tau > \vartheta > 0, \quad -a'y(0) - b'y(-\tau) \text{ при } \vartheta = 0\right\}$$

Система (2.4) соответствует системе дифференциальных уравнений с упреждением по времени вида

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\tau}^{0} y_j(t+\vartheta)\, d\eta_{js}(-\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Спектр оператора A состоит из собственных чисел λ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ — корней характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \left| -E\lambda + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta(\vartheta) \right| = 0. \tag{2.7}$$

Собственные числа оператора $-A^*$ удовлетворяют соотношению $\mu_\sigma = -\lambda_\sigma$, $(\sigma = 1, 2, \ldots)$.

Составим скалярное произведение двух векторов:

$$x(\vartheta)\ (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \text{ и } y(\vartheta)\ (\tau > \vartheta > 0):$$

$$(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} \left[\int\limits_{0}^{\vartheta} x_i(\vartheta)\, y_j(-\vartheta + \xi)\, d\xi\right] d\eta_{ji}(\vartheta). \tag{2.8}$$

Непосредственным подсчетом устанавливается справедливость тождества

$$(Ax(\vartheta), y(\vartheta)) = (x(\vartheta), A^* y(\vartheta)) \tag{2.9}$$

при любых элементах $x(\vartheta)$ и $y(\vartheta)$.

Отсюда следует, что для всякого решения системы (2.4), продолженного в сторону возрастания времени t, выражение

$$(x(\vartheta),\ y(t+\vartheta)) = C \tag{2.10}$$

будет первым интегралом системы (2.3). Таким образом, [illegible] аналогия с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Существует такое целое число, что кратность любого корня характеристического уравнения (2.7) не более n_0. Пусть λ_j — корень характеристического уравнения (2.7). Тогда уравнения

$$(A-\lambda_j I)^{n_0} x(\vartheta) = 0, \quad (-A^* - \lambda_j I)^{n_0} y(\vartheta) = 0 \tag{2.11}$$

(где I — тождественный элемент, $I(\vartheta) = x(\vartheta)$), имеют [illegible] число линейно независимых нетривиальных решений — корневых элементов $x_j(\vartheta)$ оператора A и корневых элементов $y_j(\vartheta)$ оператора $-A^*$. Решения уравнений (2.11) при $n_0 = 1$ называются собственными элементами, все другие корневые элементы называются присоединенными. Пусть множество корневых элементов оператора A для корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ будут $x_1(\vartheta), \ldots, x_N(\vartheta)$, а множество корневых элементов оператора $-A^*$, соответствующих тем же корням, будут $y_1(\vartheta), \ldots, y_N(\vartheta)$. Можно показать, что эти элементы всегда могут быть выбраны так, чтобы были выполнены условия.

Если $x_j(\vartheta)$ собственный элемент оператора A и ему не соответствуют присоединенных элементов, то имеют место условия

$$(x_j(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = \begin{cases} 1, & j=\sigma \\ 0, & j\neq\sigma. \end{cases} \tag{2.12}$$

Если элементы $x_j(\vartheta)$, $x_{j+1}(\vartheta), \ldots, x_{j+m}(\vartheta)$ составляют цепочку Жордана ($x_j(\vartheta)$ — собственный элемент, $x_{j+1}(\vartheta), \ldots, x_{j+m}(\vartheta)$ — присоединенные элементы), то сопряженному оператору будет отвечать цепочка Жордана $y_j(\vartheta), \ldots, y_{j+m}(\vartheta)$ и будет [illegible] условия:

$$\begin{gathered}(x_{j+k}(\vartheta),\ y_{j+m-\sigma}(\vartheta)) = \begin{cases} 1, & \sigma=k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m \\ 0 & \sigma\neq k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m, \end{cases} \\ (x_{j+k}(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = 0 \quad (\sigma<j,\ \sigma>j+m); \end{gathered} \tag{2.13}$$

и

$$\begin{gathered}(A-\lambda_j I)\,x_j(\vartheta) = 0 \\ (A-\lambda_j I)\,x_{j+k}(\vartheta) = x_{j+k-1}(\vartheta) \quad (k=1,\ldots,m). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Допустим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — все корни характеристического уравнения (2.7), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_j \geqslant -\alpha$, $(j=1,\ldots,N)$, где α — некоторое положительное число. Здесь λ_j взято столько раз, какова его кратность. Запишем $N = N(\alpha)$ функционалов

$$f_j(x(\vartheta)) = (x(\vartheta),\ y_j(\vartheta)) \quad (j=1,\ldots,N). \tag{2.15}$$

Условия

$$f_j(x(\vartheta)) = 0, \quad (j=1,\ldots,N) \tag{2.16}$$

определяют подпространство $Л(\alpha)$ в пространстве $C[-\tau,0]$. Произвольный элемент $x(\vartheta)$ пространства $C[-\tau,0]$ может быть представлен в виде

$$x(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{N} y_\sigma \cdot x_\sigma(\vartheta) + z(\vartheta), \tag{2.17}$$

где

$$y_\sigma = f_\sigma(x(\vartheta)), \tag{2.18}$$

если имеет место случай (2.12), и

$$y_{\sigma+k} = f_{\sigma+m-k}(x(\vartheta)) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{2.19}$$

если имеет место случай (2.13).

При этом в новых переменных $y_1, \ldots, y_N$ и $Z(\vartheta)$ система уравнений (2.3) имеет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j, \quad (\text{for condition } \cancel{\text{при условии}}\ (2.12))$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{j+m}}{dt} &= \lambda_j y_{j+m}, \\ \frac{dy_{j+m-1}}{dt} &= \lambda_j y_{j+m-1} - y_{j+m}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j - y_{j+1}; \end{aligned}\right\} \text{for condition } (\cancel{\text{при условии}}\ (2.13)) \tag{2.20}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta), \quad z_t(\vartheta) \in Л(\alpha) \tag{2.21}$$

При этом спектр оператора A на $Л(\alpha)$ состоит из собственных чисел λ_σ, $\sigma = N+1, \ldots$, за исключением первых $N: \lambda_1, \ldots, \lambda_N$.

3. К теории линейных периодических систем с последействием

Рассмотрим системы, движение которых описывают дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и последействием вида

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(t, x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

where ~~где~~

$$F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ p_{sj}(t)\, x_j(0) + \sum_{\sigma=1}^{K} q_{\sigma sj}(t)\, x_j(-\tau_\sigma) + \int_{-\tau}^{0} f_{sj}(t, \xi)\, d\xi \Big\}, \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Здесь p_{sj}, $q_{\sigma,sj}$ — периодические и непрерывные функции времени t периода ω, функции $f_{sj}(t, \xi)$ непрерывны по t и ξ в области $-\tau \leqslant \xi \leqslant 0$, $-\infty < t < +\infty$, по отношению к t они периодичны с периодом ω, $\tau \geqslant \tau_\sigma$ — запаздывание в системе.

Такого рода системы рассматривались в работах [13, 14, 15, 16, 17]. В пространстве непрерывных функций $C[-\tau, 0]$ с ранее указанной нормой $\|x(\vartheta)\|_\tau$ уравнениям (3.1) эквивалентна система обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью вида

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = P(t)\, x_t(\vartheta), \tag{3.2}$$

где $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_s(t+\vartheta),\ -\tau < \vartheta < 0,\ s = 1, \ldots, n\}$, а оператор $P(t)$ будет

$$P(t)\,x(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_s(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau < \vartheta < 0 \\ F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \ (s = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.3}$$

Then

Пусть $x(x_0(\vartheta), t_0, t)$ — решение системы (3.1) с начальной функцией $x_0(\vartheta)$ в момент времени t_0, $x(x_0(\vartheta), t_0, t_0+\vartheta) = x_0(\vartheta)$. ~~Тогда~~ $x_t(\vartheta) = x(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ определяет решение системы (3.2) с начальной функцией $x_0(\vartheta)$. При фиксированном t элемент $x_t(\vartheta)$ этого решения можно рассматривать как [illegible] начального элемента $x_0(\vartheta)$ при отображении

$$x_t(\vartheta) = T(t, t_0, x_0(\vartheta)) \tag{3.4}$$

[illegible] ратор [illegible]

[illegible] непрерывного оператора [illegible] от [illegible] радиус r_t [illegible] тора $T(t_0+\omega, t_0)$ определяет устойчивость [illegible] неустойчивость [illegible] $= 0$. Если r_t больше единицы, то движение $x = 0$ системы (3.1) [illegible] ниво. Если r_t меньше единицы, то движение $x = 0$ асимптотически [illegible] ниво. Получен аналитический вид собственных и присоединенных элементов оператора. Соответствующие им [illegible] решения (3.1) продолжимы [illegible] всю временную ось и имеют тот же аналитический вид. Так, собственный вектор $x_\sigma(\vartheta)$, соответствующий собственному числу ρ_σ, имеет вид

$$x_\sigma(\vartheta) = \rho_\sigma^{\vartheta/\omega}\Phi_\sigma(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, \tag{3.5}$$

где $\Phi_\sigma(\vartheta)$ — периодический вектор периода ω при изменении [illegible] ϑ на интервале $(-\infty, +\infty)$. $\Phi_\sigma(\vartheta)$ имеют производные по ϑ [illegible] сколь угодно высокого [illegible].

Рассмотрим со[illegible]ую систему дифференциальных [illegible] с опережением по времени [illegible] 17]

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -F_s^*(t, y_1(t+\vartheta), \ldots, y_n(t+\vartheta)), \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

where

$$-F_s^*(t, y_1(\vartheta), \ldots, y_n(\vartheta)) = -\sum_{j=1}^{n} p_{js}(t)\,y_j(0) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{k} q_{\sigma js}(t+\tau_\sigma)\,y(\tau_\sigma) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} f_{js}(t-\xi, \xi)\,y_j(-\xi)\,d\xi. \ (s = 1, \ldots, n).$$

Здесь p, q, f те же, что и в (3.1). В функциональном пространстве $C[-\tau, 0]$ уравнениям (3.6) эквивалентна система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью вида [16]

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -P^*(t)\,y_t(\vartheta), \tag{3.7}$$

where

$$y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_s(t+\vartheta),\ \tau > \vartheta > 0,\ s = 1, \ldots, n\},$$

$$-P^*y(\vartheta) = \left\{\frac{dy_s(\vartheta)}{d\vartheta} \text{ when } \tau > \vartheta > 0,\ F^*(t, y(\vartheta)) \text{ when } \vartheta = 0\right\}.$$

Обозначим через $y(y_0(\vartheta), t_0, t)$ решение системы (3.6) с начальной функцией $y_0(\vartheta)$, $\tau > \vartheta > 0$ в момент времени t_0 при $t \leqslant t_0$. Тогда $y_t(\vartheta) = y(y_0(\vartheta),$

$t_0, t+\vartheta)$, $\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0$, будет решением системы (3.7). При фиксированном t элемент $y_t(\vartheta)$ этого решения можно рассматривать как образ элемента $y_0(\vartheta)$ при отображении

$$y_t(\vartheta) = T^*(t, t_0)\, y_0(\vartheta), \quad t < t_0. \tag{3.8}$$

Оказывается, что собственные числа оператора $T^*(t_0 - \omega, t_0)$ не зависят от t_0 и совпадают с собственными числами оператора $T(t_0 + \omega, t_0)$. Структуры собственных и присоединенных векторов оператора $T^*(t_0 - \omega, t_0)$ совпадают со структурой аналогичных векторов для оператора $T(t_0 + \omega, t_0)$. Соответствующим им частные решения продолжимы не только в направлении $t < t_0$, но и при $t > t_0$.

Введем обозначение

$$(x(\vartheta),\ y(\vartheta), t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{k} \int_0^{\tau_\sigma} x_l(\xi - \tau) \cdot y_j(\xi)\, q_{\sigma l j}(t + \xi)\, d\xi -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \Big[\int_{-\theta}^{0} x_l(\xi + \vartheta)\, y_j(\xi)\, f_{jl}(t + \xi, \theta)\, d\xi \Big] d\theta. \tag{3.9}$$

Для всякого частного решения $y_t(\vartheta)$ системы (3.9), продолжимого в направлении $t \geqslant t_0$, выражение

$$(x_t(\vartheta),\ y_t(\vartheta), t) = \text{const} \tag{3.10}$$

будет первым интегралом системы (3.2).

Допустим, что все собственные числа ρ_j, удовлетворяющие условию $|\rho_j| \geqslant \varepsilon$ (ε — произвольное число), простые и их число равно $N(\varepsilon)$. Более общий случай рассматривается аналогичным способом [18]. Построим собственные вектора $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$ $(j = 1, \ldots, N(\varepsilon))$ операторов $T(t_0 + \omega, t_0)$, $T^*(t_0 - \omega, t_0)$. Пусть $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$ соответствуют собственному числу ρ_j; тогда выполнено условие

$$(x_j(\vartheta),\ y_j(\vartheta), t_0) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{3.11}$$

Пусть $x_j^0(\vartheta)$ и $y_j^0(\vartheta)$ — частные решения систем (3.1) и (3.9) с начальными функциями (при $t = t_0$) $x_j^0(\vartheta)$ и $y_j(\vartheta)$ соответственно. Всякий элемент $x(\vartheta)$ пространства $C[-\tau, 0]$ можно однозначно представить в виде суммы

$$x(\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}} + z(\vartheta), \tag{3.12}$$

где

$$a_j = \Big(x(\vartheta),\ y_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t \Big) \quad (j = 1, \ldots, N), \tag{3.13}$$

$$\Big(z(\vartheta),\ y_j(t - t_0 + \vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t \Big) = 0, \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{3.14}$$

Таким образом, всегда можно перейти от переменной $x(\vartheta)$ в системе (3.2) к скалярным переменным $a_1, \ldots, a_N$ и переменной $z(\vartheta)$, принадлежащей подпространству (3.14). В выделенных переменных системе уравнений (3.2)

будет соотношение [illegible]

$$[illegible] = [illegible] \cdot a_j \quad (j = 1, \ldots, N); \tag{3.15}$$

$$\frac{dz_j(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda'(0) z_j(\vartheta), \quad z_j(0) = (3.15). \tag{3.16}$$

При этом (3.12) может быть [illegible] образом. В пространстве $C[-\tau, 0]$ всегда имеет быть у[illegible] $\{x_j(\vartheta - t_0 + \tau), \cdot \overset{t_0}{\rho_j}{}^{\vartheta} \}$ $(j = 1, \ldots, N)$ периодически (с [illegible]) в пространстве $C[-\tau, 0]$. При этом координаты [illegible] системы в выделенном N-мерном подпространстве [illegible] $C[-\tau, 0]$ будут удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.15). А составляющая [illegible] в (3.12) будет принадлежать подпространству (3.14) и будет [illegible] убывать по закону экспоненты с показателем $-\beta \leqslant \frac{1}{\sigma} \log \varepsilon$ ([illegible]).

4. Устойчивость [illegible] приближению и исследование устойчивости в критических случаях

Рассмотрим сно[illegible] систему [illegible] его так называемую систему первого приближения (2.1), [illegible] системы (1.1) при $X_s \equiv 0$. В работах [4, 16] б[illegible] показ[illegible] характеристического уравнения (2.7) имеют [illegible] вещественные части, невозмущенное движение $x = 0$ систем[illegible] (2.1) и [illegible] асимптотически устойчиво независимо от вида нелинейных добавок X_s [illegible]. В случае, когда среди корней уравнения (2.7) имеется [illegible] положительной вещественной частью невозмущенное движение $x = 0$ систем[illegible] (2.1) и [illegible] одновременно будет неустойчиво независимо [illegible] нелинейных добавок X_s [10]. Таким образом, для стационарной [illegible] (1.1) с [illegible] имеет место полная аналогия с обыкновенн[illegible] дифференц[illegible] уравнениями в вопросе об устойчивости по первому [illegible] также, что такого рода предложения имеют место и для [illegible] системы типа (1.1) с системой первого приближ[illegible] предложение об асимптотической устойчивости получено в рабо[illegible]. Второе предложение о неустойчивости получается так же, как в [illegible] на базе расщепления, указанного в [16].

Когда среди корней характеристического уравнения имеются корни нулевые или чисто мнимые, имеет место так называемый критический случай. Критические случаи одного нулевого и пары чисто мнимых корней для стационарных систем вида (1.1) рассмотрены в работах [20]

Остановимся подробнее на исследовании устойчивости в критическом случае одного нулевого корня $\lambda_1 = 0$. Предполагается, что все остальные корни уравнения (2.7) имеют отрицательные вещественные части. Методика решения задачи устойчивости является обобщением метода Ляпунова, развитого им для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В рассматриваемом случае $\Delta(0) = 0$, но $\Delta'(0) \neq 0$. Обозначим через $\Delta_{kj}(0)$ алгебраическое дополнение к элементу, стоящему в пересечении k — строки и j - колонки в определителе $\Delta(0)$ (2.7). Пусть $\Delta_{1,1}(0) \neq 0$, $y_1(\vartheta) = \{\Delta_{jk}(0), j = 1, \ldots, n, \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0\} = \text{const}$. Рассмотрим функционал $f(x(\vartheta)) = (x(\vartheta), y_1(\vartheta))$. И рассмотрим вектор $x_1(\vartheta)$ в $C[-\tau, 0]$

$$x_1(\vartheta) = \{\Delta_{1,j}(0)\} (\Delta_{1,k}(0) \Delta'(0))^{-1} = \text{const}(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0. \tag{4.1}$$

Произвольный элемент $x(\vartheta) \in C[-\tau, 0]$ можно однозначно представить

в виде

$$x(\vartheta) = x_1(\vartheta) y + z(\vartheta). \tag{4.2}$$

Уравнение (2.3) принимает вид

$$dy/dt = 0, \tag{4.3}$$

$$dz_t(\vartheta)/dt = Az_t(\vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0.$$

А система (1.2) принимает вид:

$$dy/dt = Y(y, z(\vartheta)), \tag{4.4}$$

$$dz_t(\vartheta)/dt = Az_t(\vartheta) + Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0.$$

Здесь $Y(y, z(\vartheta))$ — функционал, определяемый формулой $Y(y, z(\vartheta)) = f[R]$, а оператор

$$Z(y, z(\vartheta), \vartheta) = R(x_1(\vartheta) y + z(\vartheta)) - x_1(\vartheta) Y(y, z(\vartheta)). \tag{4.5}$$

Рассмотрим функции

$$Y(y, 0) = gy^m + \ldots, Z(y, 0, \vartheta) = g_1(\vartheta) y^{m_1} + \ldots \tag{4.6}$$

Пусть $m_1 > m$. Тогда, если m нечетное число и $g < 0$, то движение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Если m четное или нечетное число, но $g > 0$, то движение $x = 0$ неустойчиво.

Условие $m_1 > m$ можно обеспечить, если сделать подстановку $z(\vartheta) = z_1 + u(\vartheta, y)$, где $u(\vartheta, y)$ решение уравнения

$$Au(\vartheta, y) + Z(y, u(\vartheta, y), \vartheta) = 0, \tag{4.7}$$

удовлетворяющее условию $f[u(\vartheta, y)] = 0$. На плоскости $f[z(\vartheta)] = 0$ уравнение (4.7) допускает единственное решение $u(\vartheta, y)$, аналитическое относительно y и дифференцируемое по ϑ.

Преобразование указанного типа всегда обеспечивает условие $m_1 > m$, если только это не особый случай, когда $Y(y, u(\vartheta, y), \vartheta) \equiv 0$. В этом случае имеет место устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1922; М., Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.— Л., Гостехиздат, 1946, 1952.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1959.
5. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., Гостехиздат, 1955.
6. Разумихин Б. С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием.— Прикл. матем. и механ., 1956, XXII, вып. 2.
7. Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием.— Автоматика и телемеханика, 1960, 21, № 6.
8. Красовский Н. Н. Об устойчивости нелинейных систем с последействием.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 3.
9. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., Гостехиздат, 19[illegible].
10. Шиманов С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени.— Прикл. матем. и механ., 19[illegible] XXIV, вып. 1.
11. Шиманов С. Н. Некоторые задачи теории устойчивости и колебаний систем с запаздыванием. Дисс. Институт механики АН СССР. М., 1963.
12. Hale I. K. Linear functional-differential equations with constant coefficients.— Techn. rep., N 63—66, March, RIAS, 1963.
13. Зверкин А. М. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с периодическими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1959, 128.
14. Hahn W. On difference-differential equations with periodic coefficients.— J. Math. Ann. and Appl. 3, 70—101, 1961.

15. [illegible] A. [illegible] USA, [illegible] 45
16. Шаманов С. Н. К[illegible] [illegible] 1[illegible]
17. [illegible] A. [illegible] Papula e [illegible]
18. Bellman R. and Cooke K. [illegible]
19. Bellman R. On the existence [illegible] — Ann. Math., [illegible]
20. Шаманов С. Н. [illegible] [illegible] Сибирск. мат. [illegible] XV, [illegible]
21. Пикин Э. [illegible] [illegible]
22. Рябов Ю. А. [illegible] — Изв. [illegible]
23. Рябов Ю. А. Применение метода малого [illegible] регулирования с запаздыванием.—Автоматика и [illegible], [illegible], 21, [illegible]

Vsesoyuznyy s"yezd po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike. 2d, Moscow, 1964.
Analytical mechanics. Stability of Motion. Celestial ballistics (Analiticheskaya mekhanika. Ustoychivost' dvizheniya. Nebesnaya ballistika) Ed. I. I. Sedov. Moscow, Izd-vo "Nauka", 66. 212 p.
Trudy, Vyp. 1

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Н. Шиманов

Доклад посвящен обзору работ по устойчивости движения систем, описываемых дифференциальными уравнениями с последействием или запаздыванием по времени. При этом мы останавливаемся в основном на тех работах, в которых в той или иной мере нашли обобщение известные классические факты теории устойчивости по Ляпунову для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 2, 3, 4]. Сюда относятся метод исследования при помощи функционалов, общий подход к рассмотрению уравнений с запаздыванием в функциональном пространстве, устойчивость по первому приближению, теория критических случаев, теория устойчивости линейных и нелинейных периодических систем. В докладе в основном использованы опубликованные работы советских и зарубежных авторов, а также содержатся некоторые новые результаты общего характера, касающиеся теории устойчивости периодических систем.

Следует отметить, что интерес к развитию теории систем с запаздыванием и, в частности, к теории устойчивости систем с запаздыванием вызван не только стремлением к распространению методов Ляпунова на все более и более общие объекты исследования, но и запросами практики. Известно, что в системах автоматического регулирования имеются звенья с запаздыванием по времени. Запаздывание может иметь место в объекте регулирования, управляющем органе, в обратной связи. Запаздывание имеет место в следящих системах при наличии дальней линии связи. Наконец, в механических и электрических системах дифференциальные уравнения с запаздыванием оказываются удобным аппаратом в том случае, когда эти системы имеют распределенные элементы или элементы с большим числом степеней свободы. Последнее время дифференциальные уравнения с последействием нашли свое применение в теории управления, когда неуправляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений оказывается управляемой в случае, если она способна накапливать информацию на некотором отрезке времени; при этом движение такой системы будет описывать система с последействием.

Таким образом, развитие теории систем с запаздыванием и, в частности, теории устойчивости обусловлено запросами практики.

1. Методы исследования. Общий подход к задаче

Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений с последействием вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} x_j(t+\vartheta)\, d\eta_{ij}(\vartheta) + X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \quad (i=1, \ldots n), \tag{1.1}$$

где интегралы понимаются в смысле Стилтьеса [4, стр. 159], $\eta_{il}(\vartheta)$ — функции ограниченной вариации, $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta))$ — нелинейные функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $\{x_i(\vartheta)\}$ аргумента ϑ, который меняется в пределах $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, и представляют собою нелинейные возмущения.

Точнее X_i удовлетворяют условиям Липшица по x_i

$$|X_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta)) - X_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta)| \leqslant L\|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|_\tau,$$
$$\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup\{|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}, \tag{1.2}$$
$$L = L_1\{\|x''(\vartheta)\|_\tau + \|x'(\vartheta)\|_\tau\}^{\alpha_1}.$$

Здесь L_1, α_1 — положительные числа, $X_i(0, \ldots, 0) = 0$.

Движение $x = 0$ будем называть невозмущенным движением системы (1.1). Определения устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости невозмущенного движения даются обычным образом при помощи нормы $\|x(\vartheta)\|_\tau$.

Известно, что второй метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) является основным методом решения задач устойчивости. Первые шаги в направлении перенесения этого метода на системы с запаздыванием оказались малоплодотворными [5].

Более эффективным оказался метод функций Ляпунова, в котором к производному функционалу предъявляется требование определенной отрицательности на более узком множестве кривых, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию [6, 7]. Основным недостатком приложения функций Ляпунова к исследованию устойчивости систем с запаздыванием является их неуниверсальность, необратимость теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Специфика уравнений с запаздыванием по времени или более общих дифференциальных уравнений с последействием впервые была учтена путем замены функций Ляпунова функционалами Ляпунова, определенными в некотором функциональном пространстве, например, C (пространстве непрерывных функций). При этом теоремы второго метода Ляпунова при рассмотрении решений в функциональном пространстве непрерывных функций оказались универсальным средством исследования, так как они обратимы [4].

Универсальный метод «функционалов» Ляпунова позволил получить ряд очень важных принципиальных результатов по устойчивости систем с последействием [4]. Дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени (с последействием) являются функциональными уравнениями, так как они определяют в момент времени t производные по времени от искомых величин $x_s(t)$ как функции не только этих величин, подсчитанных для момента t, но и этих величин, подсчитанных к моментам времени $t - \tau_l$, для предшествующих моментов t на отрезке запаздывания $[t - \tau, t]$ (производные по времени от величин $x_s(t)$ являются функционалами на отрезке $\{x_s(t + \vartheta), -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$, τ — запаздывание). Поэтому в качестве элемента решения естественно принять отрезок интегральной траектории системы с запаздыванием, и само решение при этом рассматривать в пространстве непрерывных функций $C[-\tau, 0]$, $x(\vartheta) = \{x_i(\vartheta), i = 1, \ldots, n, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\}$ с нормой $\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup(|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$.

Такой подход к системам с запаздыванием был предложен в работах [4, 8].

Итак, будем брать в качестве элемента решения системы (1.1) не вектор-функцию времени $x(x_0(\vartheta), t_0, t)$, а вектор — отрезок траектории $x(x_0(\omega), t_0, t + \vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Если от $x(x_0(\vartheta), t_0, t + \vartheta)$ вычислить первую

производную по времени t при $\vartheta < 0$, то найдем

$$\frac{dx_s(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)}{dt} = \frac{dx_s(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)}{d\vartheta};$$

$$\Delta t \to +0, \quad -\tau \leqslant \vartheta < 0.$$

Поэтому системе уравнений (1.1) в функциональном пространстве будет соответствовать эквивалентная система «обыкновенных дифференциальных уравнений» с операторной правой частью [4, стр. 162], [8]

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta)), \tag{1.2}$$

где

$$x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_t(t+\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0\},$$

$$Ax(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} x_j(\vartheta)\, d\eta_{kj}(\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$R(x(\vartheta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ x_k(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

То обстоятельство, что A — неограниченный линейный оператор, не мешает использованию системы (1.2) в качестве удобного рабочего аппарата исследования. Указанный подход к дифференциальным уравнениям с последействием (запаздыванием) и метод функционалов оказались эффективными средствами исследования систем с запаздыванием, позволившими существенно продвинуть теорию устойчивости для такого рода систем [4, 8].

В качестве примера использования этого подхода остановимся подробнее на некоторых дополнениях к теории линейных стационарных уравнений с последействием.

2. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с последействием вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{0} x_l(t+\vartheta)\, d\eta_{sl}(\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где интегралы в правой части, как и в системе (1.1), понимаются в смысле Стилтьеса, $\eta_{sl}(\vartheta)$ — функции с ограниченной вариацией. Частным случаем системы (2.1) будет система с запаздыванием вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n} (a_{sl}x_l(t) + b_{sl}x_l(t-\tau)) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Последняя получается из системы (2.1) при $\eta_{sl}(0) = a_{sl}$, $\eta_{sl}(-\tau) = b_{sl}$, $\eta_{sl}(\vartheta) = 0$, $-\tau < \vartheta < 0$. Линейные уравнения с последействием подробно изучены в книге [9].

Для системы (2.1) эквивалентная система «обыкновенных дифференциальных уравнений» с операторной правой частью будет

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta), \tag{2.3}$$

где оператор A определен формулой (1.3). Оператор A для системы (2.2) имеет вид $Ax(\vartheta) = \{dx_k(\vartheta)/d\vartheta$ при $-\tau \leqslant \vartheta < 0$, $ax(0) + bx(-\tau)$ при $\vartheta = 0\}$.

Рядом с системой (2.3) рассмотрим сопряженную систему [10, 11, 12]

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -A^* y_t(\vartheta), \tag{2.4}$$

где $y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_t(t+\vartheta), \tau > \vartheta > 0\}$;

$$-A^* y(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta}, & \tau \geqslant \vartheta > 0 \\ & (k = 1, \ldots, n) \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\tau}^{0} y_j(\vartheta)\, d\eta_{jk}(-\vartheta), & \vartheta = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Для системы (2.2) сопряженный оператор $-A^*$ определяется формулой

$$-A^* y(\vartheta) = \left\{\frac{dy_k(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \tau \geqslant \vartheta > 0, \quad -a'y(0) - b'y(\tau) \quad \text{при } \vartheta = 0\right\}$$

Система (2.4) соответствует системе дифференциальных уравнений с упреждением по времени вида

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{0} y_j(t+\vartheta)\, d\eta_{js}(-\vartheta) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Спектр оператора A состоит из собственных чисел λ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ — корней характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \left| -E\lambda + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta(\vartheta) \right| = 0. \tag{2.7}$$

Собственные числа оператора $-A^*$ удовлетворяют соотношению $\mu_\sigma = -\lambda_\sigma$, $(\sigma = 1, 2, \ldots)$.

Составим скалярное произведение двух векторов:

$$x(\vartheta)\ (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \text{ и } y(\vartheta)\ (\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0):$$

$$(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) - \sum_{l,j=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{0}^{\vartheta} x_l(\vartheta)\, y_j(-\vartheta+\xi)\, d\xi\right] d\eta_{jl}(\vartheta). \tag{2.8}$$

Непосредственным подсчетом устанавливается справедливость тождества

$$(Ax(\vartheta), y(\vartheta)) = (x(\vartheta), A^* y(\vartheta)) \tag{2.9}$$

при любых элементах $x(\vartheta)$ и $y(\vartheta)$.

Отсюда следует, что для всякого решения системы (2.4), продолжимого в сторону возрастания времени t, выражение

$$(x(\vartheta),\ y(t+\vartheta)) = C \tag{2.10}$$

будет первым интегралом системы (2.3). Таким образом, здесь налицо аналогия с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Существует такое целое число, что кратность любого корня характеристического уравнения (2.7) не более n_0. Пусть λ_j — корень характеристического уравнения (2.7). Тогда уравнения

$$(A-\lambda_j I)^{n_0} x(\vartheta) = 0, \quad (-A^* - \lambda_j I)^{n_0} y(\vartheta) = 0 \tag{2.11}$$

(где I — тождественный элемент, $Ix(\vartheta) = x(\vartheta)$, имеют равное число линейно независимых нетривиальных решений — корневых элементов $x_j(\vartheta)$ оператора A и корневых элементов $y_j(\vartheta)$ оператора $-A^*$. Решения уравнений (2.11) при $n_0 = 1$ называются собственными элементами, все другие корневые элементы называются присоединенными. Пусть множество корневых элементов оператора A для корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ будут $x_1(\vartheta), \ldots, x_N(\vartheta)$, а множество корневых элементов оператора $-A^*$, соответствующих тем же корням, будут $y_1(\vartheta), \ldots, y_N(\vartheta)$. Можно показать, что эти элементы всегда могут быть выбраны так, чтобы были выполнены условия.

Если $x_j(\vartheta)$ собственный элемент оператора A и ему не соответствует присоединенных элементов, то имеют место условия

$$(x_j(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = \begin{cases} 1, & j=\sigma \\ 0, & j\neq\sigma. \end{cases} \tag{2.12}$$

Если элементы $x_j(\vartheta), x_{j+1}(\vartheta), \ldots, x_{j+m}(\vartheta)$ составляют цепочку Жордана ($x_j(\vartheta)$ — собственный элемент, а $x_{j+1}(\vartheta), \ldots, x_{j+m}(\vartheta)$ — присоединенные элементы), то сопряженному оператору будет отвечать цепочка Жордана $y_j(\vartheta), \ldots, y_{j+m}(\vartheta)$ и будут иметь место условия:

$$\begin{gathered}(x_{j+k}(\vartheta),\ y_{j+m-\sigma}(\vartheta)) = \begin{cases} 1 & \sigma=k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m \\ 0 & \sigma\neq k, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant m, \end{cases} \\ (x_{j+k}(\vartheta),\ y_\sigma(\vartheta)) = 0 \quad (\sigma<j,\ \sigma>j+m);\end{gathered} \tag{2.13}$$

и

$$\begin{gathered}(A-\lambda_j I)\,x_j(\vartheta) = 0 \\ (A-\lambda_j I)\,x_{j+k}(\vartheta) = x_{j+k-1}(\vartheta) \quad (k=1,\ldots,m).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Допустим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — все корни характеристического уравнения (2.7), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_j \geqslant -\alpha$, $(j=1,\ldots,N)$, где α — некоторое положительное число. Здесь λ_j взято столько раз, какова его кратность. Запишем $N = N(\alpha)$ функционалов

$$f_j(x(\vartheta)) = (x(\vartheta),\ y_j(\vartheta)) \quad (j=1,\ldots,N). \tag{2.15}$$

Условия

$$f_j(x(\vartheta)) = 0, \quad (j=1,\ldots,N) \tag{2.16}$$

определяют подпространство $Л(\alpha)$ в пространстве $C[-\tau,0]$. Произвольный элемент $x(\vartheta)$ пространства $C[-\tau,0]$ может быть представлен в виде

$$x(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{N} y_\sigma \cdot x_\sigma(\vartheta) + z(\vartheta), \tag{2.17}$$

где

$$y_\sigma = f_\sigma(x(\vartheta)), \tag{2.18}$$

если имеет место случай (2.12), и

$$y_{\sigma+k} = f_{\sigma+m-k}(x(\vartheta)) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{2.19}$$

если имеет место случай (2.13).

При этом в новых переменных $y_1, \ldots, y_N$ и $Z(\vartheta)$ система уравнений (2.3) имеет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j, \quad \text{(при условии (2.12))}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_{j+m}}{dt} = \lambda_j y_{j+m}, \\ &\frac{dy_{j+m-1}}{dt} = \lambda_j y_{j+m-1} - y_{j+m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j - y_{j+1}; \end{aligned}\right\} \text{(при условии (2.13))} \tag{2.20}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta), \quad z_t(\vartheta) \in Л(\alpha). \tag{2.21}$$

При этом спектр оператора A на $Л(\alpha)$ состоит из собственных чисел λ_σ, $\sigma = N + 1, \ldots$, за исключением первых $N : \lambda_1, \ldots, \lambda_N$.

3. К теории линейных периодических систем с последействием

Рассмотрим системы, движение которых описывают дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и последействием вида

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(t, x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta)) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

где

$$F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ p_{sj}(t) x_j(0) + \\ + \sum_{\sigma=1}^{K} q_{\sigma sj}(t) x_j(-\tau_\sigma) + \int_{-\tau}^{0} f_{sj}(t, \xi)\, d\xi \Big\}, \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Здесь p_{sj}, $q_{\sigma,sj}$ — периодические и непрерывные функции времени t периода ω, функции $f_{sj}(t, \xi)$ непрерывны по t и ξ в области $-\tau \leqslant \xi \leqslant 0$, $-\infty < t < +\infty$, по отношению к t они периодичны с периодом ω, $\tau \geqslant \tau_\sigma$ — запаздывание в системе.

Такого рода системы рассматривались в работах [13, 14, 15, 16, 17]. В пространстве непрерывных функций $C[-\tau, 0]$ с ранее указанной нормой $\|x(\vartheta)\|_\tau$ уравнениям (3.1) эквивалентна система обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью вида

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = P(t) x_t(\vartheta), \tag{3.2}$$

где $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = \{x_s(t+\vartheta), -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, s = 1, \ldots, n\}$, а оператор $P(t)$ будет

$$P(t)x(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_s(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0 \\ F_s(t, x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), & \end{cases} \quad \vartheta = 0. \ (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.3)$$

Пусть $x(x_0(\vartheta), t_0, t)$ — решение системы (3.1) с начальной функцией $x_0(\vartheta)$ в момент времени t_0, $x(x_0(\vartheta), t_0, t_0+\vartheta) = x_0(\vartheta)$. Тогда $x_t(\vartheta) = x(x_0(\vartheta), t_0, t+\vartheta)$, $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ определяет решение системы (3.2) с начальной функцией $x_0(\vartheta)$. При фиксированном t элемент $x_t(\vartheta)$ этого решения можно рассматривать как образ начального элемента $x_0(\vartheta)$ при отображении

$$x_t(\vartheta) = T(t, t_0)x_0(\vartheta), \qquad (3.4)$$

где $T(t, t_0)$ линейный оператор, $T(t_0, t_0) = I$.

Показано, что собственные числа вполне непрерывного оператора $T(t_0+\omega, t_0)$ не зависят от t_0. Спектральный радиус r_t оператора $T(t_0+\omega, t_0)$ определяет устойчивость или неустойчивость движения $x = 0$. Если r_t больше единицы, то движение $x = 0$ системы (3.1) неустойчиво. Если r_t меньше единицы, то движение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Получен аналитический вид собственных и присоединенных элементов оператора. Соответствующие им частные решения (3.1) продолжимы на всю временную ось и имеют тот же аналитический вид. Так, собственный вектор $x_\sigma(\vartheta)$, соответствующий собственному числу ρ_σ, имеет вид

$$x_\sigma(\vartheta) = \rho_\sigma^{\vartheta/\omega}\Phi_\sigma(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, \qquad (3.5)$$

где $\Phi_\sigma(\vartheta)$ — периодический вектор периода ω при изменении параметра ϑ на интервале $(-\infty, +\infty)$. $\Phi_\sigma(\vartheta)$ имеют производные по ϑ любого сколь угодно высокого порядка.

Рассмотрим сопряженную систему дифференциальных уравнений с опережением по времени [16, 17]

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = -F_s^*(t, y_1(t+\vartheta), \ldots, y_n(t+\vartheta)), \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (3.6)$$

где

$$-F_s^*(t, y_1(\vartheta), \ldots, y_n(\vartheta)) = -\sum_{l=1}^{n} p_{ls}(t)y_l(0) -$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{k} q_{\sigma ls}(t+\tau_\sigma)y(\tau_\sigma) - \sum_{l=1}^{n}\int_{-\tau}^{0} f_{ls}(t-\xi, \xi)y_l(-\xi)\,d\xi. \ (s = 1, \ldots, n).$$

Здесь p, q, f те же, что и в (3.1). В функциональном пространстве $C[-\tau, 0]$ уравнениям (3.6) эквивалентна система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью вида [16]

$$\frac{dy_t(\vartheta)}{dt} = -P^*(t)y_t(\vartheta), \qquad (3.7)$$

где

$$y_t(\vartheta) = y(t+\vartheta) = \{y_s(t+\vartheta), \quad \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0, \quad s = 1, \ldots, n\},$$

$$-P^*y(\vartheta) = \left\{\frac{dy_s(\vartheta)}{d\vartheta} \text{ при } \tau \geqslant \vartheta > 0, \ F^*(t, y(\vartheta)) \text{ при } \vartheta = 0\right\}.$$

Обозначим через $y(y_0(\vartheta), t_0, t)$ решение системы (3.6) с начальной функцией $y_0(\vartheta)$, $\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0$ в момент времени t_0 при $t \leqslant t_0$. Тогда $y_t(\vartheta) = y(y_0(\vartheta),$

$t_0, t+\vartheta)$, $\tau \geqslant \vartheta \geqslant 0$, будет решением системы (3.7). При фиксированном t элемент $y_t(\vartheta)$ этого решения можно рассматривать как образ элемента $y_0(\vartheta)$ при отображении

$$y_t(\vartheta) = T^*(t, t_0)\, y_0(\vartheta), \quad t < t_0. \tag{3.8}$$

Оказывается, что собственные числа оператора $T^*(t, -\omega, t_0)$ не зависят от t_0 и совпадают с собственными числами оператора $T(t_0+\omega, t_0)$. Структура собственных и присоединенных векторов оператора $T^*(t_0-\omega, t_0)$ совпадает со структурой аналогичных векторов для оператора $T(t_0+\omega, t_0)$. Соответствующим им частные решения продолжимы не только в направлении $t < t_0$, но и при $t > t_0$.

Введем обозначение

$$(x(\vartheta),\ y(\vartheta), t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(0)\, y_j(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{u} \sum_{\sigma=1}^{k} \int_0^{\tau_\sigma} x_l(\xi-\tau)\cdot y_j(\xi)\, q_{\sigma jl}(t+\xi)\, d\xi -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{-\tau}^{0} \Big[\int_{-\vartheta}^{0} x_l^{-}(\xi+\vartheta)\, y_j(\xi)\, f_{jl}(t+\xi, \vartheta)\, d\xi \Big] d\vartheta. \tag{3.9}$$

Для всякого частного решения $y_t(\vartheta)$ системы (3.9), продолжимого в направлении $t \geqslant t_0$, выражение

$$(x_t(\vartheta),\ y_t(\vartheta), t) = \text{const} \tag{3.10}$$

будет первым интегралом системы (3.2).

Допустим, что все собственные числа ρ_j, удовлетворяющие условию $|\rho_j| \geqslant \varepsilon$ (ε — произвольное число), простые и их число равно $N(\varepsilon)$. Более общий случай рассматривается аналогичным способом [16]. Построим собственные вектора $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$, $(j = 1, \ldots, N(\varepsilon))$ операторов $T(t_0+\omega, t_0)$, $T^*(t_0-\omega, t_0)$. Пусть $x_j(\vartheta)$, $y_j(\vartheta)$ соответствуют собственному числу ρ_j; тогда выполнено условие

$$(x_j(\vartheta),\ y_j(\vartheta), t_0) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{3.11}$$

Пусть $x_t^{(j)}(\vartheta)$ и $y_t^{(j)}(\vartheta)$ — частные решения систем (3.1) и (3.9) с начальными функциями (при $t = t_0$) $x_j(\vartheta)$ и $y_j(\vartheta)$ соответственно. Всякий элемент $x(\vartheta)$ пространства $C[-\tau, 0]$ можно однозначно представить в виде суммы

$$x(\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j(t-t_0+\vartheta)\, \rho_j^{-\frac{t-t_0}{\omega}} + z(\vartheta), \tag{3.12}$$

где

$$a_j = \Big(x(\vartheta),\ y_j(t-t_0+\vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t\Big) \quad (j = 1, \ldots, N), \tag{3.13}$$

$$\Big(z(\vartheta),\ y_j(t-t_0+\vartheta)\, \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}},\ t\Big) = 0, \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{3.14}$$

Таким образом, всегда можно перейти от переменной $x(\vartheta)$ в системе (3.2) к скалярным переменным $a_1, \ldots, a_N$ и переменной $z(\vartheta)$, принадлежащей подпространству (3.14). В выделенных переменных системе уравнений (3.2)

12 Заказ № 2928

будет соответствовать система уравнений

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{1}{\omega} \log \rho_j \cdot a_j \quad (j = 1, \ldots, N); \tag{3.15}$$

$$\frac{dZ_t(\vartheta)}{dt} = P(t) z_t(\vartheta), \quad z_t(\vartheta) \in (3.16). \tag{3.16}$$

При этом (3.12) может быть истолкована следующим образом. В пространстве $C[-\tau, 0]$ всегда может быть указан N-мерный базис $\{x_j(t - t_0 + \vartheta) \cdot \rho_j^{\frac{t-t_0}{\omega}}\}$ $(j = 1, \ldots, N)$ периодически (с периодом ω) перемещающийся в пространстве $C[-\tau, 0]$. При этом координаты a_j, описывающие движение системы в выделенном N-мерном подпространстве пространства $C[-\tau, 0]$, будут удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.15). А составляющая движения $z_t(\vartheta)$ в (3.12) будет принадлежать подпространству (3.14) и будет неограниченно убывать по закону экспоненты с показателем $-\beta \leqslant \frac{1}{\omega} \log \varepsilon$ $(\varepsilon < 1)$.

4. Устойчивость по первому приближению и исследование устойчивости в критических случаях

Рассмотрим снова систему (1.1) и рядом с нею так называемую систему первого приближения (2.1), которая получается из системы (1.1) при $X_s \equiv 0$. В работах [4, 18] было показано, когда все корни характеристического уравнения (2.7) имеют отрицательные вещественные части, невозмущенное движение $x = 0$ систем (2.1) и (1.1) будет асимптотически устойчиво независимо от вида нелинейных добавок X_s в (1.1). В том случае, когда среди корней уравнения (2.7) имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью невозмущенное движение $x = 0$ систем (2.1) и (1.1) одновременно будет неустойчиво независимо от вида нелинейных добавок X_s [10]. Таким образом, для стационарной системы (1.1) с последействием имеет место полная аналогия с обыкновенными дифференциальными уравнениями в вопросе об устойчивости по первому приближению. Можно отметить также, что такого рода предложения имеют место и для нелинейной периодической системы типа (1.1) с системой первого приближения вида (3.1). Первое предложение об асимптотической устойчивости получено в работах [4, 19]. Второе предложение о неустойчивости получается так же, как в работе [10], на базе расщепления, указанного в [16].

Когда среди корней характеристического уравнения имеются корни нулевые или чисто мнимые, имеет место так называемый критический случай. Критические случаи одного нулевого и пары чисто мнимых корней для стационарных систем вида (1.1) рассмотрены в работах [20]

Остановимся подробнее на исследовании устойчивости в критическом случае одного нулевого корня $\lambda_1 = 0$. Предполагается, что все остальные корни уравнения (2.7) имеют отрицательные вещественные части. Методика решения задачи устойчивости является обобщением метода Ляпунова, развитого им для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В рассматриваемом случае $\Delta(0) = 0$, но $\Delta'(0) \neq 0$. Обозначим через $\Delta_{kj}(0)$ алгебраическое дополнение к элементу, стоящему в пересечении k—строки и j—колонки в определителе $\Delta(0)$ (2.7). Пусть $\Delta_{k_1 l_1}(0) \neq 0$, $y_1(\vartheta) = \{\Delta_{jk_1}(0), j = 1, \ldots, n; \tau \geqslant \vartheta \geqslant 0\} = \text{const}$. Рассмотрим функционал $f(x(\vartheta)) = (x(\vartheta), y_1(\vartheta))$. И рассмотрим вектор $x_1(\vartheta)$ в $C[-\tau, 0]$

$$x_1(\vartheta) = \{\Delta_{l_1 j}(0)\} (\Delta_{l_1 k_1}(0) \Delta'(0))^{-1} = \text{const}(\vartheta), \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0. \tag{4.1}$$

Произвольный элемент $x(\vartheta) \in C[-\tau, 0]$ можно однозначно представить

в виде

$$x(\vartheta) = x_1(\vartheta)\, y + z(\vartheta). \tag{4.2}$$

Уравнение (2.3) принимает вид

$$dy / dt = 0, \tag{4.3}$$

$$dz_t(\vartheta) / dt = Az_t(\vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0.$$

А система (1.2) принимает вид:

$$dy / dt = Y(y, z(\vartheta)), \tag{4.4}$$

$$dz_t(\vartheta) / dt = Az_t(\vartheta) + Z(y, z_t(\vartheta), \vartheta), \quad f[z_t(\vartheta)] = 0.$$

Здесь $Y(y, z(\vartheta))$ — функционал, определяемый формулой $Y(y, z(\vartheta)) = f[R]$, а оператор

$$Z(y, z(\vartheta), \vartheta) = R(x_1(\vartheta)\, y + z(\vartheta)) - x_1(\vartheta)\, Y(y, z(\vartheta)). \tag{4.5}$$

Рассмотрим функции

$$Y(y, 0) = gy^m + \ldots, Z(y, 0, \vartheta) = g_1(\vartheta)\, y^{m_1} + \ldots \tag{4.6}$$

Пусть $m_1 > m$. Тогда, если m нечетное число и $g < 0$, то движение $x = 0$ асимптотически устойчиво. Если m четное или нечетное число, но $g > 0$, то движение $x = 0$ неустойчиво.

Условие $m_1 > m$ можно обеспечить, если сделать подстановку $z(\vartheta) = z_1 + u(\vartheta, y)$, где $u(\vartheta, y)$ решение уравнения

$$Au(\vartheta, y) + Z(y, u(\vartheta, y), \vartheta) = 0, \tag{4.7}$$

удовлетворяющее условию $f[u(\vartheta, y)] = 0$. На плоскости $f[x(\vartheta)] = 0$ уравнение (4.7) допускает единственное решение $u(\vartheta, y)$, аналитическое относительно y и дифференцируемое по ϑ.

Преобразование указанного типа всегда обеспечивает условие $m_1 > m$, если только это не особый случай, когда $Y(y, u(\vartheta, y), \vartheta) \equiv 0$. В этом случае имеет место устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1922; М., Гостехиздат, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.— Л., Гостехиздат, 1946, 1952.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1959.
5. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., Гостехиздат, 1955.
6. Разумихин Б. С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием.— Прикл. матем. и механ., 1956, XXII, вып. 2.
7. Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием.— Автоматика и телемеханика, 1960, 21, № 6.
8. Красовский Н. Н. Об устойчивости квазилинейных систем с последействием.— Докл. АН СССР, 1958, 119, № 3.
9. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., Гостехиздат, 1951.
10. Шиманов С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени.— Прикл. матем. и механ., 1960, XXIV, вып. 1.
11. Шиманов С. Н. Некоторые задачи теории устойчивости и колебаний систем с запаздыванием. Дисс. Институт механики АН СССР. М., 1963.
12. Hale I. K. Linear functional-differential equations with constant coefficients.— Techn. rep., N 63—66, March, RIAS, 1963.
13. Зверкин А. М. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с периодическими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1959, 128.
14. Hahn W. On difference-differential equations with periodic coefficients.— J. Math. Ann. and Appl. 3, 70—101, 1961.

15. S t o k e s A. A Floquet theory for functional differential equations.— Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1962, 48.
16. Ш и м а н о в С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени.— Прикл. матем. и механ., 1963, XXVII, вып. 3, 450—458.
17. H a l a n a y A. Teoria calitativă a ecuatiilor diferentiale. Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1963.
18. B e l l m a n R. and G o o k e K. Differential-difference equations. Academic Press, 1963.
19. B e l l m a n R. On the existense and boundedness of solutions of non-linear differential-difference equations.— Ann. Math., 1949, 50, N 2.
20. Ш и м а н о в С. Н. а) Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием.— Прикл. матем. и механ., 1960, XXIV, вып. 3; б) Изв. вузов (Математика), 1961, № 1 (20); в) Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием.— Сибирск. мат. журнал, 1961, II, № 3; г) Критический случай пары чисто мнимых корней для системы с последействием (особый случай).— Сибирск. мат. журнал, 1963, IV, № 2; д) Прикл. матем. и механ., 1961, XXV, вып. 6.
21. П и н н и Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., ИЛ, 1961.
22. Р я б о в Ю. А. Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием.— Инж. ж., 1961, 1, вып. 2.
23. Р я б о в Ю. А. Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием.—Автоматика и телемеханика, 1960, 21, вып. 6