N65 12600

Code 1

~~CR-59755~~

N65 12600 12

Cat. 19

Stabilität in allgemeinen Regelungssystemen

von

Emilio O. Roxin*

I. Einleitung.

Die Regelungssysteme sind in ihrer allgemeinsten Form dadurch gekennzeichnet, dass ihr zeitliches Verhalten nicht allein durch die Anfangsbedingungen, sondern zusätzlich noch durch einen willkürlichen Einfluss (der "Steuerfunktion") bestimmt wird. Im deterministischen Fall, wo wir also von zufälligen ("stochastischen") Einflüssen absehen, ist es bei gegebenem Regelungssystem von vornherein bestimmt ob, ausgehend zur Zeit t_o vom Punkt x_o des Phasenraumes, es möglich ist den Punkt x zur Zeit t vermittels einer zweckmässigen Steuerfunktion zu erreichen oder nicht. Die Menge der Punkte x wo dies möglich ist, bezeichnen wir mit

(*) $$F(x_o,t_o,t)$$

und nennen sie die erreichbare Menge oder, als Funktion ihrer Argumente gedacht, die Erreichbarkeitsfunktion. Kürzlich habe ich darauf hingewiesen dass es in vieler Hinsicht vorteilhaft ist, für die Entwicklung der allgemeinen Theorie der Regelungssysteme von dieser Erreichbarkeitsfunktion auszugehen [5], [6], [7]. Dies entspricht der Darstellung der dynamischen Systeme durch eine zu (*) analoge Funktion, wo jedoch die erreichbare Menge auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpft.

Der Hauptvorteil so einer axiomatischen Darstellung der Theorie liegt in der Erfassung bestimmter Begriffe, z.B. der Stabilität, in ihrer ganzen Allgemeinheit. Die vorliegende Arbeit soll zeigen wie all die feineren Abstufungen des

---

* R.I.A.S., Baltimore Md., U.S.A. und Universität Buenos Aires, Argentinien.

Diese Forschungen wurden zum Teil unterstützt durch die U.S.Air Force unter Kontrakt AF-49(638)-1242, durch die National Aeronautics and Space Administration unter Kontrakt NASw-845 und durch die Office of Naval Research unter Kontrakt No. Nonr-3693(00).

Stabilitätsbegriffes (also der gleichmässigen, äqui-asymptotischen usw. Stabilität) sich von dem bekannten Fall der dynamischen Systeme auf die Regelungssysteme übertragen lassen. Man kann diese Übertragung in einer starken und einer schwachen Form vollziehen. Dabei verstehen wir unter der starken Form einer gewissen Eigenschaft, im Fall der Regelungssysteme, die Forderung dass alle, von dem betreffenden Punkt (x_o, t_o) ausgehenden Bewegungen $x(t)$, diese gewisse Eigenschaft besitzen, während die schwache Form darin besteht, dass zumindest eine Bewegung $x(t)$ existiert, welche von (x_o, t_o) ausgeht und diese Eigenschaft besitzt. Im folgendem werden die dementsprechenden Definitionen präzise gegeben.

Die meisten in dieser Arbeit aufgestellten Behauptungen sind sehr einfach zu beweisen. Wo dies nicht der Fall ist, wird der Leser auf eine ausführlichere Arbeit verwiesen, welche anderswo veröffentlicht werden wird. Es sei auch noch bemerkt dass der hier gegebene Begriff der starken Stabilität schon von Zubov [9] eingehend behandelt wurde (siehe auch die Darstellung bei Hahn [2], §35).

II. Definition der allgemeinen Regelungssysteme.

Die Definition der allgemeinen Regelungssysteme, wie wir sie hier geben werden, geht im wesentlichen auf Barbashin [1] zurück.

Wir betrachten als Phasenraum $X = \{x, y, \ldots\}$ einen vollständigen, lokal-kompakten metrischen Raum, zum Beispiel den reellen euklidischen n-dimensionalen Raum. Untermengen von X werden mit grossen Buchstaben (A, B, X, Y, ...) bezeichnet. Es bedeute

i) $\rho(x,y)$ den Abstand der Punkte x und y.

ii) $\rho(x,A) = \rho(A,x) = \inf_{y \in A} \rho(x,y)$, (Abstand des Punktes x von der Menge A).

iii) $\beta(A,B) = \sup_{x \in A} \rho(x,B)$, ("Abweichung" der Menge A von der Menge B).

iv) $\alpha(A,B) = \max(\beta(A,B), \beta(B,A))$, (Abstand der Mengen A und B in der Hausdorff'schen Metrik).

v) $\gamma(A,B) = \inf_{x \in A} \rho(x,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x,y)$.

vi) $S_\varepsilon(A) = \{ x \mid \rho(x,A) \leq \varepsilon \}$, (ε-Umgebung der Menge A).

Die unabhängige Variable t, welche wir als Zeit deuten wollen, kann entweder alle reellen ($t\in R$) oder alle nicht-negativen ($t\in R^+$) Werte annehmen. Im folgenden schreiben wir meistens $t\in R$; es könnte jedoch ebensogut $t\in R^+$ gesetzt werden, was wohl mehr physikalischen Sinn hat in Bezug auf die Stabilität.

Ein Regelungssystem wird gegeben durch seine Erreichbarkeitsfunktion $F(x_o,t_o,t)$, welche folgenden Axiomen genügen soll:

I. $F(x_o,t_o,t)$ ist eine abgeschlossene nicht-leere Untermenge von X, definiert für jedes $x_o\in X$, $t_o\leq t$.

II. Anfangsbedingung: $F(x_o,t_o,t_o) = \{x_o\}$ für jedes $x_o \in X$, $t_o \in R$.

III. Halbgruppen-Eigenschaft: für $t_o \leq t_1 \leq t_2$ ist

$$F(x_o,t_o,t_2) = \bigcup_{x_1 \in F(x_o,t_o,t_1)} F(x_1,t_1,t_2) .$$

IV. Rückwärts-Verlängerbarkeit: für jedes $x_1 \in X$, $t_o\leq t_1$, existiert mindestens ein $x_o \in X$ so dass $x_1 \in F(x_o,t_o,t_1)$.

V. Stetigkeit in t: zu jedem $x_o \in X$, $t_o \leq t_1, \varepsilon > 0$, lässt sich ein $\delta > 0$ angeben, so dass aus $|t - t_1| < \delta$ die Ungleichung

$$\alpha(F(x_o,t_o,t_1),F(x_o,t_o,t)) < \varepsilon$$

folgt.

VI. Halbstetigkeit in (x_o,t_o), gleichmässig in jedem endlichen t-Intervall: zu jedem $x_o \in X$, $t_o \leq t_1 \leq t_2$, $\varepsilon > 0$, lässt sich ein $\delta > 0$ angeben, so dass aus $\rho(x_o,x_o') < \delta$, $|t_o - t_o'| < \delta$, $t_1 \leq t \leq t_2$, die Ungleichung

$$\beta(F(x_o',t_o',t), F(x_o,t_o,t)) < \varepsilon$$

folgt.

Es ist nicht besonders schwierig aus diesen Voraussetzungen das Verhalten abzuleiten, welches vernünftigerweise von Regelungssystemen zu erwarten ist (siehe Roxin [5], [6] oder auch Barbashin [1], wo die Axiome im wesentlichen mit den obigen übereinstimmen).

Wir gebrauchen noch einige Hilfselemente.

Definition 1: eine Bewegung des Regelungssystems ist eine Funktion $u(t)$, definiert in irgend einem Intervall $t_o \leq t \leq t_1$, mit $u \in X$, für welche folgendes gilt:

$$\text{aus} \quad t_o \leq \tau_o < \tau_1 \leq t_1$$
$$\text{folgt} \quad u(\tau_1) \in F(u(\tau_o), \tau_o, \tau_1).$$

Die Kurve im Phasenraum, auf welcher die Bewegung $u(t)$ stattfindet, nennen wir Trajektorie.

Die Stetigkeit der Bewegung $u(t)$ folgt aus ihrer Definition und den Axiomen I - VI. Es kann sogar bewiesen werden:

Satz 1: ist $x_1 \in F(x_o, t_o, t_1)$, so existiert eine Bewegung $x = u(t)$ des Regelungssystems derart, dass

$$u(t_o) = x_o \quad ; \quad u(t_1) = x_1.$$

Wir sagen dann dass $u(t)$ von (x_o, t_o) nach (x_1, t_1) geht.

Satz 2: Die Bewegungen $u_i(t)$ $(i=1,2,3,\ldots)$ eines Regelungssystems seien alle definiert im Intervall $T = [t_o, t_1]$, und

$$\lim_{i \to \infty} u_i(t_o) = x_o \; .$$

Dann existiert ein Teilfolge $u_{i_k}(t)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ welche in $[t_o, t_1]$ gleichmässig gegen eine gewisse Bewegung $u_o(t)$ konvergiert.

Der Beweis beider wichtiger Sätze ist in der oben angeführtgen Literatur zu finden.

III. Die starke Form der Stabilität.

Definition 2: Die Menge $A \subset X$ heisst stark positiv invariant in Bezug auf ein gewisses Regelungssystem, wenn für jedes $x_o \in A$, $t_o \leq t$, die Relation

$$F(x_o, t_o, t) \subset A$$

gilt. Besteht insbesondere A aus einem einzigen Punkt, so kann man auch von einer starken Ruhelage sprechen.

Definition 3: Die stark positiv invariante Menge $A \subset X$ heisst stark stabil wenn, für jedes $\varepsilon > 0$ und $t_o \in R$, ein $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ existiert, so dass aus $\rho(x_o, A) < \delta$,

$$F(x_o, t_o, t) \subset S_\varepsilon(A)$$

für alle $t \leq t_o$ folgt.

Diese Stabilität werden wir auch starke Ljapunov - Stabilität nennen. Der Stabilitätsbegriff kann nun stufenweise verschärft werden, wie es z.B. Yoshizawa [8] und Massera [4] für gewöhnliche dynamische Systeme getan haben. Wir können dementsprechend folgende Stabilitätseigenschaften definieren, welche wir der Anzahl halber einfach mit Nummern bezeichnen; das "s" hinter der Nummer soll dabei an "stark" erinnern.

Wir gehen stets von einer stark positiv invarianten Menge A aus. Die Eigenschaften sind folgende:

1s) Starke Ljapunov-Stabilität nach Definition 3.

2s) Die gleiche Definition 3, jedoch mit $\delta(\varepsilon, t_o) = \delta(\varepsilon)$ unabhängig von t_o (gleichmässige starke Stabilität).

3s) Für jedes $t_o \in R$ existiert ein $\delta_o(t_o) > 0$ so dass für jede Bewegung $u(t)$ mit $u(t_o) = x_o \in S_{\delta_o}(A)$,

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(u(t), A) = 0$$

gilt (quasi-asymptotische starke Stabilität).

4s) Für jedes $t_0 \in R$ existiert ein $\delta_0(t_0) > 0$, so dass aus $\rho(x_0, A) < 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(F(x_0, t_0, t), A) = 0$$

folgt. (Also Eigenschaft (3s), gleichmässig für alle von (x_0, t_0) ausgehenden Bewegungen $u(t)$).

5s) Eigenschaft (3s) mit δ_0 unabhängig von t_0.

6s) Eigenschaft(4s) mit δ_0 unabhängig von t_0.

7s) Für jedes $t_0 \in R$ existiert ein $\delta_0(t_0) > 0$ so dass

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(F(S_{\delta_0}(A), t_0, t), A) = 0 .$$

(Also Eigenschaft (4s) gleichmässig in $x_0 \in S_{\delta_0}(A)$).

8s) Eigenschaft (7s) mit δ_0 unabhängig von t_0.(Quasi-equi-asymptotische starke Stabilität).

9s) Es existiert ein $\delta_0 > 0$ so dass

$$\lim_{\tau \to +\infty} \beta(F(S_{\delta_0}(A), t_0, t_0 + \tau), A) = 0$$

gleichmässig für alle $t_0 \in R$ (gleichmässige quasi-equi-asymptotische starke Stabilität).

Es ist ersichtlich, dass man noch mehr Zwischenstufen definieren könnte, was jedoch nur dann interessant wäre, wenn auch wichtige physikalische Systeme solches Verhalten zeigen.

Die Beziehungen zwischen den definierten Eigenschaften ist in Figur 1 veranschaulicht. Was die Beziehungen der Gruppen 1-2 und 3 bis 9 betrifft, zeigt folgendes einfache Beispiel, dass im allgemeinen aus (8s) (und im Falle $t \in R^+$ sogar aus (9s)) nicht die Ljapunov-Stabilität (1s) folgt, beide Gruppen also von einander unabhängig sind.

Beispiel: Es sei $x \in R$ und das Regelungssystem dadurch definiert, dass wir die Bewegungen $u(t)$ zeichnerisch in Figur 2 darstellen, wodurch sie genügend verständlich gegeben sind. Die Abnahme gegen Null, der Kurven rechts, kann z.B. nach dem Exponential-Gesetz angenommen werden. Man beachte, dass durch jeden Punkt mit $x = 0$ viele Bewegungen hindurchgehen. Die Axiome I bis VI sind selbsverständlich erfüllt, wie man leicht nachprüft.

Die Menge $A = \{x \mid x < 0\}$ ist positiv stark invariant und erfüllt die Eigenschaft (8s), denn alle Bewegungen streben ja gegen A. Im Fall wo nur Werte $t \in R^+$ betrachtet werden, ist sogar (9s) erfüllt. Dennoch ist (1s) nicht erfüllt.

Dieses Beispiel hat den Nachteil, dass A nicht abgeschlossen ist. Es kann auch gezeigt werden,dass wenn die positiv-stark-invariante Menge A kompakt ist, (1s) aus (7s) folgt. Der Beweis wird in einer eingehenderen Arbeit gebracht werden.

Die gewöhnliche starke asymptotische Stabilität bedeutet die Vereinigung der Eigenschaften (1s) + (3s); die equi-asymptotische starke Stabilität, (1s) + (8s) und die gleichmässige equi-asymptotische starke Stabilität, (2s) + (9s).

Bei der asymptotischen starken Stabilität ist es auch wichtig das dazugehörige Attraktionsgebiet zu bestimmen (vgl. LaSalle [3]), jedoch wollen wir hier nicht darauf näher eingehen.

IV. Die schwache Form der Stabilität.

Definition 4: Die Menge $A \subset X$ heisst schwach positiv invariant in Bezug auf ein gewisses Regelungssystem, wenn für jedes $x_o \in A$, $t_o \in R$, mindestens eine Bewegung $u(t)$ existiert, für welche $u(t_o) = x_o$ und $u(t) \in A$ für alle $t \geq t_o$. Besteht insbesondere A aus einem einzigen Punkt, so kann man auch von einer schwachen Ruhelage sprechen.

<u>Satz von Barbashin</u> [1]: notwendig und hinreichend für die schwache positive Invarianz der abgeschlossenen Menge A, ist die Bedingung

$$F(x_o,t_o,t) \cap A \neq \emptyset$$

für jedes $x_o \in A$, $t_o \in R$, $t \geq t_o$. ($\emptyset$ bedeutet die leere Menge.)

<u>Definition 5</u>: die schwach positiv invariante Menge $A \subset X$ heisst schwach stabil, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und $t_o \in R$, ein $\delta = \delta(\varepsilon,t_o) > 0$ existiert, so dass aus $\rho(x_o,A) < \delta$ die Existenz von mindestens einer Bewegung $u(t)$ mit $u(t_o) = x_o$, $u(t) \in S_\varepsilon(A)$ für alle $t \geq t_o$ folgt.

Diese Stabilität werden wir auch schwache Ljapunov Stabilität nennen.

Wie im vorigen Abschnitt, geben wir jetzt die Definition von verschiedenen Abstufungen des schwachen Stabilitätsbegriffes, wobei das beigefügte "w" (vom englischen "weak") sie von den starken Eigenschaften des vorigen Abschnittes unterscheiden soll.

1w) Schwache Ljapunov Stabilität nach Definition 5.

2w) Die gleiche Definition 5, jedoch mit $\delta(\varepsilon, t_o) = \delta(\varepsilon)$ unabhängig von t_o (gleichmässige schwache Stabilität).

3w) Für jedes $t_o \in R$ existiert ein $\delta_o(t_o) > 0$, so dass aus $\rho(x_o,A) < \delta_o$,

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma(F(x_o,t_o,t), A) = 0$$

folgt($\gamma(A,B) = \inf \{ \rho(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$).

4w) Für jedes $t_o \in R$ existiert ein $\delta_o(t_o) > 0$ so dass aus $\rho(x_o, A) < \delta_o$ die Existenz von mindestens einer Bewegung $u(t)$ mit

$$u(t_o) = x_o\ , \quad \lim_{t \to +\infty} \rho(u(t), A) = 0$$

folgt (quasi-asymptotische schwache Stabilität).

5w) Eigenschaft (3w) mit δ_o unabhängig von t_o.

6w) Eigenschaft (4w) mit δ_o unabhängig von t_o.

7w) Für jedes $t_o \in R$ existiert ein $\delta_o(t_o) > 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T = T(t_o,\varepsilon)$, so dass aus $x_o \in S_{\delta_o}(A)$ die Existenz von mindestens einer Bewegung $u(t)$ mit $u(t_o) = x_o$, $\rho(u(t), A) < \varepsilon$ für alle $t \geq t_o + T$ folgt.

8w) Eigenschaft (7w) mit δ_o unabhängig von t_o.

9w) Eigenschaft (8w) mit $T(\varepsilon)$ unabhängig von t_o.

Die Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften werden wieder durch das gleiche Diagramm von Figur 1 dargestellt.

Das in Figur 2 gegebene Beispiel gilt auch für den Fall der schwachen Stabilität. Die Menge $x \leq 0$ ist schwach positiv invariant ($x = 0$ ist sogar eine schwache Ruhelage!); die Eigenschaft (8w) ist erfüllt (bei $t \geq 0$ ist sogar (9w) erfüllt), jedoch nicht die schwache Ljapunov Stabilität (1w). Dies beweist die Unabhängigkeit beider Gruppen von Eigenschaften des Diagrammes.

Literatur.

[1] Barbashin, E.A., "On the theory of generalized dynamical systems", Uch. Zap. M.G.U. No. 135, (1949), pp. 110-133.

[2] Hahn, W., "Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov", (Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgebiete) Springer Verlag, 1959.

[3] LaSalle, J.P., "The extent of asymptotic stability", Proc. Nat. Acad. Sci. 46 (1960), pp. 363-365.

[4] Massera, J.L.. " Contributions to stability theory", Annals Math. 64 , (1956), pp. 182-206.

[5] Roxin, E.O., "Axiomatic theory of control systems", RIAS Report 62-16 (August 1962).

[6] Roxin, E.O., "Axiomatic foundation of the theory of control systems", 2. Internationale Konferenz der Intern. Fed. Autom. Control, Basel, August 1963.

[7] Roxin, E.O., "Stability in general control systems", im Druck in Contrib. to Diff. Equations (Interscience Publ.).

[8] Yoshizawa, T., "Asymptotic behaviour of solutions of ordinary differential equations near sets", RIAS Report 61-5 (1961).

[9] Zubov, V.I., "Methods of A.M.Ljapunov and their application", Izdat. Leningrad Univ. (1957) (russisch, englische Übersetzung als AEC-tr-4439, physics, U.S.A.E.C., Washington D.C., 1961).

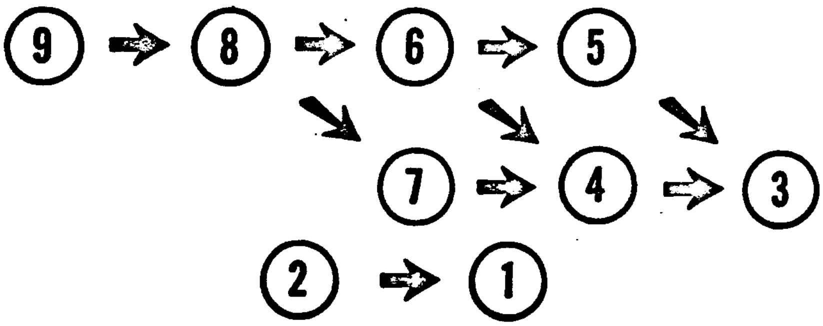

Fig. 1

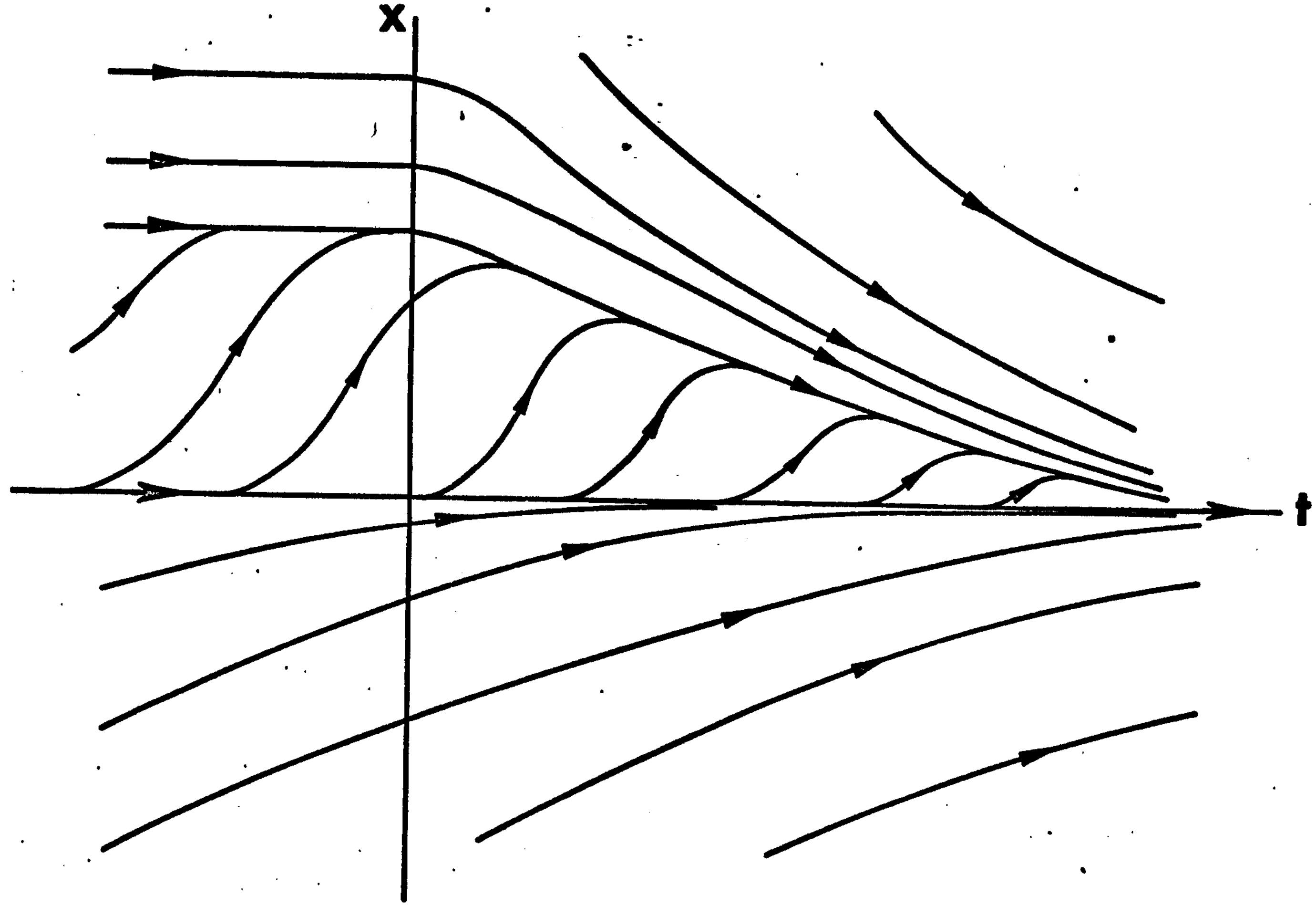

Fig. 2