NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION

Technical Report 32-1193

A Numerical Table of Lommel Functions With Two Imaginary Arguments

E. Wai-Kwok Ng

JET PROPULSION LABORATORY
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
PASADENA, CALIFORNIA

January 15, 1968

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION

Technical Report 32-1193

A Numerical Table of Lommel Functions With Two Imaginary Arguments

E. Wai-Kwok Ng

Approved by:

R. J. Jirka, Manager
Computation and Analysis Section

JET PROPULSION LABORATORY
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
PASADENA, CALIFORNIA

January 15, 1968

TECHNICAL REPORT 32-1193

Prepared Under Contract No. NAS 7-100
National Aeronautics & Space Administration

PRECEDING PAGE BLANK NOT FILMED.

Acknowledgment

The author is indebted to Dr. B. Barbanis for helpful comments, and to Mr. L. E. Godfrey for editorial assistance. The computations were performed initially on the IBM 7094 at Columbia University. They were checked by a revised computer program at JPL.

PRECEDING PAGE BLANK NOT FILMED.

Contents

Tables

Abstract

A numerical table is given for Lommel functions of two imaginary arguments. The values are obtained from a truncated Neumann Series, which was found empirically to be decidedly superior to simple numerical quadrature.

A Numerical Table of Lommel Functions[1] with Two Imaginary Arguments

I. Properties of the Lommel Functions

Lommel functions of two real arguments are generally defined by the Neumann series:

$$U_n(w,z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z) \qquad (1)$$

$$V_n(w,z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z) \qquad (2)$$

The corresponding functions with imaginary arguments can be defined as:

$$\Upsilon_n(w,z) = i^{-n} U_n(iw, iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z) \qquad (3)$$

$$\Theta_n(w,z) = i^{-n} V_n(iw, iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z) \qquad (4)$$

Whereas there exists a wide variety of computed tables for U_n and V_n of real arguments, there seems to exist only one such table for Υ_n and Θ_n, due to Kuznetsov, Ref. 2. These functions will no doubt find more and more applications in applied-mathematical problems, especially in their integral representations. For example, Kuznetsov used them in an electromagnetic problem, the author in a stellar-dynamics problem, and Goldstein, Ref. 3, in a heat-transfer problem; in all cases, they were used as integrals involving the hyperbolic Bessel functions.

In this Report, the numerical table for Υ_1, Υ_2, Θ_0 and Θ_1 follows in Tables 1 and 2. Before discussing the range and grid of the table, it is necessary to give some properties of these functions. All these properties can be readily derived from the corresponding properties for U_n and V_n given in Ref. 4.

[1]An earlier version of this text was deposited with the American Mathematical Society, and a short note about this work was published in Ref. 1.

Higher order functions can be computed from the recursion relations:

$$\Upsilon_n(w,z) - \Upsilon_{n+2}(w,z) = \left(\frac{w}{z}\right)^n I_n(z) \quad (5)$$

$$\Theta_n(w,z) - \Theta_{n+2}(w,z) = \left(\frac{z}{w}\right)^n I_n(z) \quad (6)$$

and the cross-relations

$$\Upsilon_{2n+1}(w,z) + \Theta_{-2n+1}(w,z) = \sinh\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w}\right) \quad (7)$$

$$\Upsilon_{2n+2}(w,z) + \Theta_{-2n}(w,z) = \cosh\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w}\right) \quad (8)$$

The range of the table can be extended in w by the following expressions:

$$\Upsilon_n(w,z) = \Theta_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right) \quad (9)$$

$$\Theta_n(w,z) = \Upsilon_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right) \quad (10)$$

For $n > 1$, the following integral representations will be found valid:

$$\Upsilon_n(w,z) = w^n z^{1-n} \int_0^1 I_{n-1}(zt) \cosh\left[\frac{1}{2} w(1-t^2)\right] t^n dt \quad (11)$$

$$\Upsilon_{n+1}(w,z) = w^n z^{1-n} \int_0^1 I_{n-1}(zt) \sinh\left[\frac{1}{2} w(1-t^2)\right] t^n dt \quad (12)$$

$$\Upsilon_n(w,z) \pm \Upsilon_{n+1}(w,z) = w^n z^{1-n} \int_0^1 I_{n-1}(zt) \exp \pm \frac{1}{2} w(1-t^2)\, t^n dt \quad (13)$$

$$\Theta_n(w,z) = (-1)^n w^{2-n} z^{n-1} \int_1^\infty I_{1-n}(zt) \cosh \times \left[\frac{1}{2} w(1-t^2)\right] \frac{dt}{t^{n-2}} \quad (14)$$

$$\Theta_{n+1}(w,z) = -(-1)^n w^{2-n} z^{n-1} \int_1^\infty I_{1-n}(zt) \sinh \times \left[\frac{1}{2} w(1-t^2)\right] \frac{dt}{t^{n-2}} \quad (15)$$

$$\Theta_n(w,z) \pm \Theta_{n-1}(w,z) = (-1)^n w^{2-n} z^{n-1} \int_1^\infty I_{1-n}(zt) \exp \mp \frac{1}{2} w(1-t^2) \frac{dt}{t^{n-2}} \quad (16)$$

Equations (14–16) are only valid for positive z and w. Certain differential equations also express important properties of these functions:

$$\frac{\partial \Upsilon_n(w,z)}{\partial z} = \frac{z}{w} \Upsilon_{n+1}(w,z) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Theta_n(w,z)}{\partial z} = \frac{z}{w} \Theta_{n-1}(w,z) \quad (18)$$

$$2\frac{\partial \Upsilon_n(w,z)}{\partial w} = \Upsilon_{n-1}(w,z) - \left(\frac{z}{w}\right)^2 \Upsilon_{n+1}(w,z) \quad (19)$$

$$2\frac{\partial \Theta(w,z)}{\partial w} = \Theta_{n+1}(w,z) - \left(\frac{w}{z}\right)^2 \Theta_{n-1}(w,z) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \Upsilon_n(w,z)}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{w}\right)^2 \Upsilon_{n+2}(w,z) + \frac{1}{w} \Upsilon_{n+1}(w,z) \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_n(w,z)}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{w}\right)^2 \Theta_{n-2}(w,z) + \frac{1}{w} \Theta_{n-1}(w,z) \quad (22)$$

II. Computation and Results

Owing to the increasing use of automatic computers, mathematical tables now serve mainly for preliminary surveys of problems before machine-programming, and for rough checks of subprograms. In view of this, a table with wide range is often more useful than one of equal size but with a finer grid. It is in this spirit that we have chosen for publication the following range and grid, although our computer program can yield results with a finer grid.

(a) $w = 0.1\,(0.1)\,1.0$, $z = 0.1\,(0.1)\,1.0$ for $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Theta_1, \Theta_0$

(b) $w = 1\,(1)\,z$, $z = 2\,(1)\,20$ for Υ_1, Υ_2

(c) $w = 2\,(1)\,20$, $z = 1\,(1)\,w$ for Θ_1, Θ_0

This thus serves to extend the Kuznetsov table which has the range $w = 1(1)6$, $z = 0(1)6$. Computation of (b) and (c) was effected by straightforward application of Eqs. (3) and (4), respectively. Computation of (a) was done by combined usage of Eqs. (3), (4), (7) and (8). For $w = z = 0$ or $w \neq 0$, $z = 0$, the following properties should be noted:

$$\Upsilon_0(0,0) = \Theta_0(0,0) = 1, \Upsilon_n(0,0) = \Theta_n(0,0) = 0 \qquad n \geqq 1$$

$$\Upsilon_1(w,0) = \sinh\frac{1}{2}w, \qquad \Upsilon_2(w,0) = \cosh\frac{1}{2}w - 1$$

$$\Theta_0(w,0) = 1, \qquad \Theta_n(w,0) = 0 \qquad n \geqq 1$$

We did not compute Θ_0 and Θ_1 for case (b) because Eqs. (7) and (8) can easily be applied to obtain these and furthermore, when z or w is large, we have,

$$\Theta_0 \approx \Theta_1 \approx \exp\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w}$$

The same situation arises for Υ_1 and Υ_2 in the case of (c).

In checking the values in this table, we employed Eqs. (11) and (12) with the Simpson rule and found that such a method is decidedly inferior to the use of Eqs. (3) and (4) for computation. For example, it takes almost one and one half times as much computer time with Eqs. (11) and (12) as with Eqs. (3) and (4) to produce the same accuracy. All values given in the table are accurate to six significant figures. In the use of Eqs. (3) and (4), we have tried different numbers of terms in the series, viz, 6, 9, 12, 13, and found that in most cases nine terms are sufficient for the required accuracy. The number of terms used is indicated on the table by footnotes b-e as follows:

[b]Previous to this value of z, six terms are sufficient for the indicated accuracy.

[c]Previous to this value of z, nine terms are sufficient for the indicated accuracy and after this, twelve terms are sufficient for the indicated accuracy.

[d]Previous to this value of w, six terms are sufficient for the indicated accuracy.

[e]Previous to this value of w, nine terms are sufficient for the indicated accuracy and after this, twelve terms are sufficient for the indicated accuracy.

Table 1. First part of numerical table, w = 0.1–1.0, z = 0.1–1.0

	z	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
w = 0.1					
	0.1	0.500834E-01[a]	0.125130E-02	0.500834E-01	0.100375E 01
	0.2	0.502713E-01	0.125443E-02	0.202341E 00	0.103016E 01
	0.3	0.505856E-01	0.125966E-02	0.470510E 00	0.112637E 01
	0.4	0.510277E-01	0.126701E-02	0.905088E 00	0.138226E 01
	0.5	0.516000E-01	0.127651E-02	0.164678E 01	0.196964E 01
	0.6	0.523053E-01	0.128819E-02	0.304899E 01	0.325724E 01
	0.7	0.531472E-01	0.130210E-02	0.599706E 01	0.613099E 01
	0.8	0.541298E-01	0.131828E-02	0.128216E 02	0.129132E 02
	0.9	0.552582E-01	0.133681E-02	0.301066E 02	0.301771E 02
	1.0[b]	0.565381E-01	0.135775E-02	0.779515E 02	0.780130E 02
w = 0.2					
	0.1	0.100292E 00	0.500832E-02	0.250339E-01	0.100281E 01
	0.2	0.100668E 00	0.502086E-02	0.100668E 00	0.101505E 01
	0.3	0.101297E 00	0.504179E-02	0.229455E 00	0.104824E 01
	0.4	0.102182E 00	0.507120E-02	0.418913E 00	0.112255E 01
	0.5	0.103327E 00	0.510920E-02	0.686876E 00	0.126942E 01
	0.6	0.104739E 00	0.515594E-02	0.107046E 01	0.153792E 01
	0.7	0.106423E 00	0.521159E-02	0.164177E 01	0.200878E 01
	0.8	0.108390E 00	0.527636E-02	0.253724E 01	0.282304E 01
	0.9	0.110648E 00	0.535050E-02	0.401608E 01	0.424081E 01
	1.0[b]	0.113209E 00	0.543429E-02	0.658152E 01	0.676357E 01
w = 0.3					
	0.1	0.150751E 00	0.112805E-01	0.166883E-01	0.100264E 01
	0.2	0.151316E 00	0.113087E-01	0.670501E-01	0.101226E 01
	0.3	0.152260E 00	0.113558E-01	0.152260E 00	0.103398E 01
	0.4	0.153589E 00	0.114220E-01	0.275239E 00	0.107665E 01
	0.5	0.155309E 00	0.115076E-01	0.442176E 00	0.115339E 01
	0.6	0.157428E 00	0.116128E-01	0.664889E 00	0.128307E 01
	0.7	0.159958E 00	0.117381E-01	0.964451E 00	0.149302E 01
	0.8	0.162910E 00	0.118839E-01	0.137694E 01	0.182418E 01
	0.9	0.166301E 00	0.120508E-01	0.196298E 01	0.234036E 01
	1.0[b]	0.170147E 00	0.122395E-01	0.282423E 01	0.314470E 01
w = 0.4					
	0.1	0.201587E 00	0.200835E-01	0.125160E-01	0.100258E 01
	0.2	0.202341E 00	0.201336E-01	0.502713E-01	0.101128E 01
	0.3	0.203602E 00	0.202175E-01	0.114009E 00	0.102901E 01
	0.4	0.205376E 00	0.203353E-01	0.205376E 00	0.106074E 01
	0.5	0.207672E 00	0.204875E-01	0.327559E 00	0.111374E 01
	0.6	0.210502E 00	0.206748E-01	0.486245E 00	0.119812E 01
	0.7	0.213880E 00	0.208977E-01	0.691014E 00	0.132774E 01
	0.8	0.217823E 00	0.211571E-01	0.957378E 00	0.152192E 01
	0.9	0.222350E 00	0.214541E-01	0.130986E 01	0.180821E 01
	1.0[b]	0.227485E 00	0.217898E-01	0.178679E 01	0.222705E 01
w = 0.5					
	0.1	0.252927E 00	0.314392E-01	0.100127E-01	0.100255E 01
	0.2	0.253871E 00	0.315177E-01	0.402110E-01	0.101083E 01
	0.3	0.255450E 00	0.316489E-01	0.911385E-01	0.102671E 01
	0.4	0.257672E 00	0.318332E-01	0.163912E 00	0.105340E 01
	0.5	0.260548E 00	0.320713E-01	0.260548E 00	0.109555E 01
	0.6	0.264092E 00	0.323642E-01	0.384449E 00	0.115953E 01
	0.7	0.268322E 00	0.327129E-01	0.541089E 00	0.125381E 01
	0.8	0.273259E 00	0.331187E-01	0.738978E 00	0.138977E 01
	0.9	0.278928E 00	0.335833E-01	0.991029E 00	0.158283E 01
	1.0[b]	0.285359E 00	0.341083E-01	0.131656E 01	0.185432E 01

[a]The printouts in this table are in FORTRAN E format.

[b]Previous to this value of z, six terms are sufficient for the indicated accuracy.

Table 1 (contd)

	z	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
w = 0.6					
	0.1	0.304898E 00	0.453762E-01	0.834385E-02	0.100254E 01
	0.2	0.306034E 00	0.454893E-01	0.335065E-01	0.101058E 01
	0.3	0.307933E 00	0.456785E-01	0.759177E-01	0.102546E 01
	0.4	0.310606E 00	0.459443E-01	0.136417E 00	0.104942E 01
	0.5	0.314064E 00	0.462876E-01	0.216446E 00	0.108572E 01
	0.6	0.318327E 00	0.467099E-01	0.318327E 00	0.113876E 01
	0.7	0.323414E 00	0.472128E-01	0.445656E 00	0.121432E 01
	0.8	0.329352E 00	0.477980E-01	0.603836E 00	0.131999E 01
	0.9	0.336171E 00	0.484679E-01	0.800816E 00	0.146571E 01
	1.0[b]	0.343905E 00	0.492249E-01	0.104811E 01	0.166475E 01
w = 0.7					
	0.1	0.357632E 00	0.619292E-01	0.715185E-02	0.100253E 01
	0.2	0.358961E 00	0.620835E-01	0.287184E-01	0.101043E 01
	0.3	0.361182E 00	0.623413E-01	0.650562E-01	0.102471E 01
	0.4	0.364309E 00	0.627036E-01	0.116838E 00	0.104703E 01
	0.5	0.368355E 00	0.631717E-01	0.185176E 00	0.107980E 01
	0.6	0.373341E 00	0.637475E-01	0.271797E 00	0.112630E 01
	0.7	0.379292E 00	0.644330E-01	0.379292E 00	0.119074E 01
	0.8	0.386238E 00	0.652309E-01	0.511444E 00	0.127858E 01
	0.9	0.394214E 00	0.661441E-01	0.673672E 00	0.139686E 01
	1.0[b]	0.403261E 00	0.671762E-01	0.873636E 00	0.155469E 01
w = 0.8					
	0.1	0.411259E 00	0.811396E-01	0.625786E-02	0.100252E 01
	0.2	0.412782E 00	0.813415E-01	0.251278E-01	0.101034E 01
	0.3	0.415330E 00	0.816789E-01	0.569150E-01	0.102422E 01
	0.4	0.418913E 00	0.821530E-01	0.102182E 00	0.104547E 01
	0.5	0.423552E 00	0.827656E-01	0.161831E 00	0.107597E 01
	0.6	0.429268E 00	0.835189E-01	0.237224E 00	0.111823E 01
	0.7	0.436090E 00	0.844160E-01	0.330353E 00	0.117552E 01
	0.8	0.444053E 00	0.854600E-01	0.444053E 00	0.125197E 01
	0.9	0.453196E 00	0.866550E-01	0.582297E 00	0.135288E 01
	1.0[b]	0.463567E 00	0.880055E-01	0.750583E 00	0.148494E 01
w = 0.9					
	0.1	0.465914E 00	0.103055E 00	0.556253E-02	0.100252E 01
	0.2	0.467634E 00	0.103311E 00	0.223354E-01	0.101027E 01
	0.3	0.470510E 00	0.103739E 00	0.505856E-01	0.102389E 01
	0.4	0.474556E 00	0.104341E 00	0.907968E-01	0.104441E 01
	0.5	0.479792E 00	0.105118E 00	0.143729E 00	0.107335E 01
	0.6	0.486245E 00	0.106073E 00	0.210502E 00	0.111272E 01
	0.7	0.493947E 00	0.107211E 00	0.292719E 00	0.116513E 01
	0.8	0.502936E 00	0.108535E 00	0.392614E 00	0.123385E 01
	0.9	0.513258E 00	0.110051E 00	0.513258E 00	0.132304E 01
	1.0[b]	0.524965E 00	0.111763E 00	0.658827E 00	0.143787E 01
w = 1.0					
	0.1	0.521734E 00	0.127731E 00	0.500627E-02	0.100251E 01
	0.2	0.523652E 00	0.128048E 00	0.201015E-01	0.101023E 01
	0.3	0.526860E 00	0.128578E 00	0.455234E-01	0.102365E 01
	0.4	0.531373E 00	0.129322E 00	0.816969E-01	0.104365E 01
	0.5	0.537214E 00	0.130283E 00	0.129278E 00	0.107147E 01
	0.6	0.544412E 00	0.131466E 00	0.189218E 00	0.110878E 01
	0.7	0.553003E 00	0.132874E 00	0.262850E 00	0.115771E 01
	0.8	0.563030E 00	0.134512E 00	0.352004E 00	0.122095E 01
	0.9	0.574543E 00	0.136388E 00	0.459152E 00	0.130185E 01
	1.0[b]	0.587601E 00	0.138507E 00	0.587601E 00	0.140457E 01

Table 2. Continuation of numerical table, $w = 2.0$–20.0, $z = 2.0$–20.00

	w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$		z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z = 2.0				w = 2.0			
	1.0	0.822220E 00[a]	0.175433E 00		1.0	0.285359E 00	0.130017E 01
	2.0[d]	0.181343E 01	0.741305E 00		2.0[b]	0.181343E 01	0.302089E 01
z = 3.0				w = 3.0			
	1.0	0.135371E 01	0.253519E 00		1.0	0.189209E 00	0.128118E 01
	2.0	0.293223E 01	0.106414E 01		2.0	0.112477E 01	0.259595E 01
	3.0[d]	0.500894E 01	0.259343E 01		3.0[b]	0.500894E 01	0.747423E 01
z = 4.0				w = 4.0			
	1.0	0.249251E 01	0.406957E 00		1.0	0.141636E 00	0.127456E 01
	2.0	0.531299E 01	0.169652E 01		2.0	0.822220E 00	0.245502E 01
	3.0	0.885296E 01	0.408910E 01		3.0	0.339217E 01	0.625072E 01
	4.0[d]	0.136450E 02	0.800316E 01		4.0[b]	0.136450E 02	0.193051E 02
z = 5.0				w = 5.0			
	1.0	0.495047E 01	0.708449E 00		1.0	0.113209E 00	0.127150E 01
	2.0	0.104180E 02	0.293496E 01		2.0	0.649971E 00	0.239112E 01
	3.0	0.170081E 02	0.700229E 01		3.0	0.258655E 01	0.573231E 01
	4.0	0.255217E 02	0.135166E 02		4.0	0.969060E 01	0.160344E 02
	5.0[d]	0.371016E 02	0.234850E 02		5.0[b]	0.371016E 02	0.507249E 02
z = 6.0				w = 6.0			
	1.0	0.103643E 02	0.131255E 01		1.0	0.942959E-01	0.126984E 01
	2.0	0.215974E 02	0.540862E 01		2.0	0.538132E 00	0.235676E 01
	3.0	0.346989E 02	0.127907E 02		3.0	0.209954E 01	0.546279E 01
	4.0	0.509545E 02	0.243923E 02		4.0	0.756407E 01	0.144499E 02
	5.0	0.721459E 02	0.417423E 02		5.0	0.272011E 02	0.421433E 02
	6.0[d]	0.100857E 03	0.672406E 02		6.0[b]	0.100857E 03	0.134475E 03

[a] The printouts in this table are in FORTRAN E format.

[b] Previous to this value of *z*, six terms are sufficient for the indicated accuracy.

[c] Previous to this value of *z*, nine terms are sufficient for the indicated accuracy and after this, twelve terms are sufficient for the indicated accuracy.

[d] Previous to this value of *w*, six terms are sufficient for the indicated accuracy.

[e] Previous to this value of *w*, nine terms are sufficient for the indicated accuracy and after this, twelve terms are sufficient for the indicated accuracy.

Table 2 (contd)

	w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$		z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z = 7.0				w = 7.0			
	1.0	0.225412E 02	0.255219E 01		1.0	0.808017E-01	0.126884E 01
	2.0	0.466212E 02	0.104702E 02		2.0	0.459448E 00	0.233616E 01
	3.0	0.739818E 02	0.245786E 02		3.0	0.177118E 01	0.530430E 01
	4.0	0.106806E 03	0.463939E 02		4.0	0.623112E 01	0.135555E 02
	5.0	0.148033E 03	0.783649E 02		5.0	0.215741E 02	0.376114E 02
	6.0	0.201810E 03	0.124272E 03		6.0	0.757137E 02	0.112051E 03
	7.0[d]	0.274158E 03	0.189862E 03		7.0[b]	0.274158E 03	0.358455E 03
z = 8.0				w = 8.0			
	1.0	0.504478E 02	0.515560E 01		1.0	0.706882E-01	0.126819E 01
	2.0	0.103742E 03	0.210736E 02		2.0	0.400993E 00	0.232284E 01
	3.0	0.163057E 03	0.491698E 02		3.0	0.153381E 01	0.520303E 01
	4.0[d]	0.232283E 03	0.920233E 02		4.0	0.531299E 01	0.129984E 02
	5.0	0.316512E 03	0.153745E 03		5.0	0.179477E 02	0.349064E 02
	6.0	0.422741E 03	0.240580E 03		6.0[b]	0.607950E 02	0.994578E 02
	7.0	0.560875E 03	0.361859E 03		7.0	0.209688E 03	0.299843E 03
	8.0[e]	0.745239E 03	0.531458E 03		8.0[c]	0.745239E 03	0.959022E 03
z = 9.0				w = 9.0			
	1.0	0.115438E 03	0.107391E 02		1.0	0.628259E-01	0.126774E 01
	2.0	0.236333E 03	0.437654E 02		2.0	0.355815E 00	0.231373E 01
	3.0	0.368699E 03	0.101606E 03		3.0	0.135371E 01	0.513431E 01
	4.0	0.519746E 03	0.188826E 03		4.0	0.463942E 01	0.126270E 02
	5.0	0.698687E 03	0.312610E 03		5.0	0.154098E 02	0.331534E 02
	6.0	0.917856E 03	0.483721E 03		6.0[b]	0.509545E 02	0.916267E 02
	7.0	0.119429E 04	0.717966E 03		7.0	0.170080E 03	0.265354E 03
	8.0	0.155207E 04	0.103845E 04		8.0	0.578760E 03	0.805572E 03
	9.0[e]	0.202577E 04	0.147898E 04		9.0[c]	0.202577E 04	0.257257E 04
z = 10.0				w = 10.0			
	1.0	0.268865E 03	0.229383E 02		1.0	0.565381E-01	0.126742E 01
	2.0	0.548516E 03	0.932522E 02		2.0	0.319832E 00	0.230722E 01
	3.0	0.850714E 03	0.215607E 03		3.0	0.121215E 01	0.508552E 01
	4.0	0.118929E 04	0.398360E 03		4.0	0.412261E 01	0.123664E 02
	5.0	0.158154E 04	0.654531E 03		5.0	0.135287E 02	0.319482E 02
	6.0	0.205006E 04	0.100335E 04		6.0[b]	0.439738E 02	0.863978E 02
	7.0	0.262533E 04	0.147264E 04		7.0	0.143426E 03	0.243210E 03
	8.0	0.334949E 04	0.210238E 04		8.0	0.473483E 03	0.711867E 03
	9.0	0.428176E 04	0.295007E 04		9.0	0.159353E 04	0.217001E 04
	10.0[e]	0.550662E 04	0.409876E 04		10.0[c]	0.550662E 04	0.691447E 04

Table 2 (contd)

	w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$		z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z=11.0				w=11.0			
	1.0	0.635303E 03	0.500289E 02		1.0	0.513948E-01	0.126719E 01
	2.0	0.129248E 04	0.202974E 03		2.0	0.290487E 00	0.230242E 01
	3.0	0.199516E 04	0.467697E 03		3.0	0.109780E 01	0.504960E 01
	4.0	0.277070E 04	0.859970E 03		4.0	0.371261E 01	0.121763E 02
	5.0	0.365257E 04	0.140412E 04		5.0	0.120748E 02	0.310819E 02
	6.0	0.468358E 04	0.213563E 04		6.0[b]	0.387555E 02	0.827190E 02
	7.0	0.592026E 04	0.310513E 04		7.0	0.124289E 03	0.228071E 03
	8.0	0.743900E 04	0.438425E 04		8.0	0.401392E 03	0.650118E 03
	9.0	0.934505E 04	0.607430E 04		9.0	0.131343E 04	0.191661E 04
	10.0	0.117855E 05	0.831915E 04		10.0	0.437950E 04	0.585627E 04
	11.0[e]	0.149685E 05	0.113243E 05		11.0[c]	0.149685E 05	0.186128E 05
z=12.0				w=12.0			
	1.0	0.151923E 04	0.111053E 03		1.0	0.471094E-01	0.126701E 01
	2.0	0.308381E 04	0.449797E 03		2.0	0.266092E 00	0.229876E 01
	3.0	0.474234E 04	0.103350E 04		3.0	0.100343E 01	0.502240E 01
	4.0	0.655026E 04	0.189270E 04		4.0	0.337885E 01	0.120332E 02
	5.0	0.857423E 04	0.307410E 04		5.0	0.109149E 02	0.304372E 02
	6.0	0.108978E 05	0.464508E 04		6.0[b]	0.346989E 02	0.800251E 02
	7.0	0.136289E 05	0.670050E 04		7.0	0.109873E 03	0.217222E 03
	8.0	0.169108E 05	0.937269E 04		8.0	0.349060E 03	0.607078E 03
	9.0	0.209367E 05	0.128459E 05		9.0	0.111864E 04	0.174596E 04
	10.0	0.259715E 05	0.173778E 05		10.0	0.363356E 04	0.517296E 04
	11.0	0.323832E 05	0.233300E 05		11.0	0.120190E 05	0.158256E 05
	12.0[e]	0.406887E 05	0.312142E 05		12.0[c]	0.406887E 05	0.501632E 05
z=13.0				w=13.0			
	1.0	0.366985E 04	0.250247E 03		1.0	0.434839E-01	0.126687E 01
	2.0	0.743552E 04	0.101215E 04		2.0	0.245489E 00	0.229592E 01
	3.0	0.113990E 05	0.232009E 04		3.0	0.924171E 00	0.500129E 01
	4.0	0.156752E 05	0.423459E 04		4.0	0.310153E 01	0.119228E 02
	5.0	0.204000E 05	0.684743E 04		5.0	0.996615E 01	0.299438E 02
	6.0	0.257406E 05	0.102898E 05		6.0[b]	0.314486E 02	0.779891E 02
	7.0	0.319093E 05	0.147441E 05		7.0	0.986080E 02	0.209159E 03
	8.0	0.391819E 05	0.204617E 05		8.0	0.309356E 03	0.575765E 03
	9.0	0.479239E 05	0.277874E 05		9.0	0.975823E 03	0.162506E 04
	10.0	0.586274E 05	0.371960E 05		10.0	0.310766E 04	0.470420E 04
	11.0	0.719634E 05	0.493441E 05		11.0	0.100308E 05	0.139863E 05
	12.0	0.888582E 05	0.651455E 05		12.0	0.329470E 05	0.428091E 05
	13.0[e]	0.110603E 06	0.858811E 05		13.0[c]	0.110603E 06	0.135326E 06

Table 2 (contd)

w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$	z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z=14.0			w=14.0		
1.0	0.894158E 04	0.571278E 03	1.0	0.403766E−01	0.126676E 01
2.0	0.180890E 05	0.230783E 04	2.0	0.227855E 00	0.229367E 01
3.0	0.276602E 05	0.527951E 04	3.0	0.856636E 00	0.498458E 01
4.0	0.378976E 05	0.960863E 04	4.0	0.286722E 01	0.118357E 02
5.0	0.490844E 05	0.154795E 05	5.0	0.917466E 01	0.295575E 02
6.0	0.615630E 05	0.231530E 05	6.0[b]	0.287814E 02	0.764105E 02
7.0	0.757604E 05	0.329884E 05	7.0	0.895494E 02	0.202989E 03
8.0	0.922220E 05	0.454745E 05	8.0	0.278181E 03	0.552204E 03
9.0	0.111658E 06	0.612735E 05	9.0	0.866739E 03	0.153596E 04
10.0	0.135007E 06	0.812841E 05	10.0	0.271850E 04	0.436737E 04
11.0[e]	0.163528E 06	0.106731E 06	11.0	0.861168E 04	0.127041E 05
12.0	0.198930E 06	0.139294E 06	12.0	0.276435E 05	0.378634E 05
13.0	0.243556E 06	0.181290E 06	13.0	0.902325E 05	0.115889E 06
14.0	0.300651E 06	0.235942E 06	14.0	0.300651E 06	0.365360E 06
z=15.0			w=15.0		
1.0	0.219490E 05	0.131899E 04	1.0	0.376838E−01	0.126667E 01
2.0	0.443469E 05	0.532301E 04	2.0	0.212590E 00	0.229185E 01
3.0	0.676658E 05	0.121564E 05	3.0	0.798381E 00	0.497112E 01
4.0	0.924272E 05	0.220709E 05	4.0	0.266649E 01	0.117658E 02
5.0	0.119231E 06	0.354432E 05	5.0	0.850351E 01	0.292491E 02
6.0	0.148793E 06	0.528030E 05	6.0[b]	0.265501E 02	0.751603E 02
7.0	0.181990E 06	0.748722E 05	7.0	0.820959E 02	0.198155E 03
8.0[e]	0.219926E 06	0.102622E 06	8.0	0.253029E 03	0.533988E 03
9.0	0.264012E 06	0.137354E 06	9.0	0.780700E 03	0.146821E 04
10.0	0.316087E 06	0.180810E 06	10.0	0.241940E 04	0.411637E 04
11.0	0.378574E 06	0.235333E 06	11.0	0.755265E 04	0.117713E 05
12.0	0.454709E 06	0.304087E 06	12.0	0.238157E 05	0.343666E 05
13.0	0.548859E 06	0.391380E 06	13.0[c]	0.760750E 05	0.102600E 06
14.0	0.666976E 06	0.503112E 06	14.0	0.246932E 06	0.313916E 06
15.0	0.817254E 06	0.647430E 06	15.0	0.817254E 06	0.987079E 06

Table 2 (contd)

	w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$		z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z=16.0				w=16.0			
	1.0	0.542299E 05	0.307581E 04		1.0	0.353279E-01	0.126660E 01
	2.0	0.109451E 06	0.124021E 05		2.0	0.199245E 00	0.229036E 01
	3.0	0.166701E 06	0.282819E 05		3.0	0.747605E 00	0.496013E 01
	4.0	0.227118E 06	0.512412E 05		4.0	0.249251E 01	0.117089E 02
	5.0	0.291993E 06	0.820638E 05		5.0	0.792668E 01	0.289989E 02
	6.0[e]	0.362847E 06	0.121843E 06		6.0[b]	0.246536E 02	0.741523E 02
	7.0	0.441521E 06	0.172056E 06		7.0	0.758473E 02	0.194290E 03
	8.0	0.530289E 06	0.234673E 06		8.0	0.232283E 03	0.519587E 03
	9.0	0.632023E 06	0.312301E 06		9.0	0.711058E 03	0.141537E 04
	10.0	0.750398E 06	0.408391E 06		10.0	0.218246E 04	0.392378E 04
	11.0	0.890190E 06	0.527526E 06		11.0	0.673389E 04	0.110693E 05
	12.0	0.105768E 07	0.675813E 06		12.0	0.209367E 05	0.317949E 05
	13.0	0.126120E 07	0.861452E 06		13.0	0.657526E 05	0.930852E 05
	14.0	0.151196E 07	0.109552E 07		14.0[c]	0.209113E 06	0.278219E 06
	15.0	0.182515E 07	0.139308E 07		15.0	0.675327E 06	0.850728E 06
	16.0	0.222153E 07	0.177480E 07		16.0	0.222153E 07	0.266825E 07
z=17.0				w=17.0			
	1.0	0.134755E 06	0.723609E 04		1.0	0.332492E-01	0.126654E 01
	2.0	0.271725E 06	0.291551E 05		2.0	0.187480E 00	0.228913E 01
	3.0	0.413219E 06	0.664016E 05		3.0	0.702944E 00	0.495103E 01
	4.0	0.561747E 06	0.120092E 06		4.0	0.234018E 01	0.116618E 02
	5.0	0.720136E 06	0.191878E 06		5.0	0.742519E 01	0.287929E 02
	6.0	0.891669E 06	0.284055E 06		6.0[b]	0.230202E 02	0.733273E 02
	7.0[e]	0.108027E 07	0.399696E 06		7.0	0.705270E 02	0.191149E 03
	8.0	0.129071E 07	0.542862E 06		8.0	0.214858E 03	0.507989E 03
	9.0	0.152895E 07	0.718879E 06		9.0	0.653484E 03	0.137328E 04
	10.0	0.180248E 07	0.934716E 06		10.0	0.199008E 04	0.377241E 04
	11.0	0.212092E 07	0.119952E 07		11.0	0.608256E 04	0.105264E 05
	12.0	0.249672E 07	0.152533E 07		12.0	0.186985E 05	0.298426E 05
	13.0	0.294618E 07	0.192810E 07		13.0	0.579325E 05	0.860187E 05
	14.0	0.349087E 07	0.242910E 07		14.0[c]	0.181282E 06	0.252373E 06
	15.0	0.415962E 07	0.305688E 07		15.0	0.574234E 06	0.754862E 06
	16.0	0.499130E 07	0.385005E 07		16.0	0.184592E 07	0.230641E 07
	17.0	0.603874E 07	0.486125E 07		17.0	0.603874E 07	0.721622E 07

Table 2 (contd)

w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$	z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z=18.0			w=18.0		
1.0	0.336556E 06	0.171579E 05	1.0	0.314015E-01	0.126648E 01
2.0	0.678110E 06	0.690862E 05	2.0	0.177029E 00	0.228810E 01
3.0[e]	0.102986E 07	0.157174E 06	3.0	0.663350E 00	0.494341E 01
4.0	0.139741E 07	0.283817E 06	4.0	0.220567E 01	0.116225E 02
5.0	0.178702E 07	0.452553E 06	5.0	0.698494E 01	0.286214E 02
6.0	0.220588E 07	0.668256E 06	6.0[b]	0.215974E 02	0.726430E 02
7.0	0.266246E 07	0.937421E 06	7.0	0.659377E 02	0.188560E 03
8.0	0.316700E 07	0.126855E 07	8.0	0.200001E 03	0.498498E 03
9.0	0.373201E 07	0.167271E 07	9.0	0.605048E 03	0.133916E 04
10.0	0.437309E 07	0.216421E 07	10.0	0.183068E 04	0.365105E 04
11.0	0.510997E 07	0.276165E 07	11.0	0.555215E 04	0.100968E 05
12.0	0.596781E 07	0.348922E 07	12.0	0.169108E 05	0.283216E 05
13.0	0.697915E 07	0.437862E 07	13.0	0.518210E 05	0.806118E 05
14.0	0.818645E 07	0.547153E 07	14.0[c]	0.160055E 06	0.233006E 06
15.0	0.964565E 07	0.682323E 07	15.0	0.499204E 06	0.684741E 06
16.0	0.114311E 08	0.850749E 07	16.0	0.157553E 07	0.204897E 07
17.0	0.136426E 08	0.106235E 08	17.0	0.504326E 07	0.625491E 07
18.0	0.164150E 08	0.133058E 08	18.0	0.164150E 08	0.195242E 08
z=19.0			w=19.0		
1.0	0.844377E 06	0.409719E 05	1.0	0.297484E-01	0.126644E 01
2.0	0.170014E 07	0.164880E 06	2.0	0.167684E 00	0.228723E 01
3.0	0.257909E 07	0.374749E 06	3.0	0.628003E 00	0.493697E 01
4.0[e]	0.349390E 07	0.675788E 06	4.0	0.208597E 01	0.115894E 02
5.0	0.445856E 07	0.107565E 07	5.0	0.659514E 01	0.284769E 02
6.0	0.548902E 07	0.158484E 07	6.0[b]	0.203460E 02	0.720690E 02
7.0	0.660389E 07	0.221725E 07	7.0	0.619349E 02	0.186398E 03
8.0	0.782530E 07	0.299095E 07	8.0	0.187170E 03	0.490625E 03
9.0	0.918006E 07	0.392923E 07	9.0	0.563694E 03	0.131108E 04
10.0	0.107012E 08	0.506201E 07	10.0	0.169636E 04	0.355210E 04
11.0	0.124297E 08	0.642769E 07	11.0	0.511173E 04	0.975034E 04
12.0	0.144176E 08	0.807580E 07	12.0	0.154508E 05	0.271109E 05
13.0	0.167310E 08	0.100704E 08	13.0	0.469212E 05	0.763722E 05
14.0	0.194550E 08	0.124948E 08	14.0[c]	0.143384E 06	0.218082E 06
15.0	0.227006E 08	0.154582E 08	15.0	0.441618E 06	0.631775E 06
16.0	0.266129E 08	0.191044E 08	16.0	0.137327E 07	0.185892E 07
17.0	0.313845E 08	0.236245E 08	17.0	0.431964E 07	0.556357E 07
18.0	0.372719E 08	0.292741E 08	18.0	0.137732E 08	0.169676E 08
19.0	0.446205E 08	0.363975E 08	19.0	0.446205E 08	0.528437E 08

Table 2 (contd)

	w	$\Upsilon_1(w,z)$	$\Upsilon_2(w,z)$		z	$\Theta_1(w,z)$	$\Theta_0(w,z)$
z=20.0				w=20.0			
	1.0	0.212708E 07	0.984631E 05		1.0	0.282607E-01	0.126641E 01
	2.0	0.428032E 07	0.396039E 06		2.0	0.159277E 00	0.228648E 01
	3.0[e]	0.648676E 07	0.899387E 06		3.0	0.596252E 00	0.493148E 01
	4.0	0.877526E 07	0.161995E 07		4.0	0.197875E 01	0.115611E 02
	5.0	0.111775E 08	0.257447E 07		5.0	0.624746E 01	0.283541E 02
	6.0	0.137293E 08	0.378582E 07		6.0[b]	0.192363E 02	0.715825E 02
	7.0	0.164718E 08	0.528410E 07		7.0	0.584103E 02	0.184574E 03
	8.0	0.194538E 08	0.710821E 07		8.0	0.175968E 03	0.484018E 03
	9.0	0.227333E 08	0.930787E 07		9.0	0.527943E 03	0.128766E 04
	10.0	0.263812E 08	0.119464E 08		10.0	0.158154E 04	0.347025E 04
	11.0	0.304846E 08	0.151045E 08		11.0	0.473999E 04	0.946645E 04
	12.0	0.351522E 08	0.188849E 08		12.0	0.142359E 05	0.261295E 05
	13.0	0.405208E 08	0.234195E 08		13.0	0.429080E 05	0.729788E 05
	14.0	0.467645E 08	0.288778E 08		14.0	0.129969E 06	0.206310E 06
	15.0	0.541069E 08	0.354792E 08		15.0[c]	0.396180E 06	0.590691E 06
	16.0	0.628374E 08	0.435097E 08		16.0	0.121712E 07	0.171430E 07
	17.0	0.733347E 08	0.533445E 08		17.0	0.377440E 07	0.504884E 07
	18.0	0.860971E 08	0.654793E 08		18.0	0.118356E 08	0.151108E 08
	19.0	0.101787E 09	0.805737E 08		19.0	0.376013E 08	0.460381E 08
	20.0	0.121291E 09	0.995121E 08		20.0	0.121291E 09	0.143070E 09

References

1. Ng, E. W., "Lommel Function of Two Imaginary Arguments," *Math. Comp.*, Vol. 20, p. 624, 1967.
2. Kuznetsov, P. I., "Lommel functions of two imaginary arguments," *Akad. Nauk. SSSR. Prikl. Mat. Meh.*, Vol. II, pp. 555–560, 1947.
3. Goldstein, S., "On the mathematics of exchange processes in fixed columns," *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, Vol. 219, pp. 151–185, 1953.
4. Watson, G. N., *Theory of Bessel functions,* Cambridge University Press, London, 1962.