

PREMIER MINISTRE

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

GPO PRICE \$ \_\_\_\_\_

CSFTI PRICE(S) \$ \_\_\_\_\_

Hard copy (HC) 3.00Microfiche (MF) 1.65

ff 653 July 65

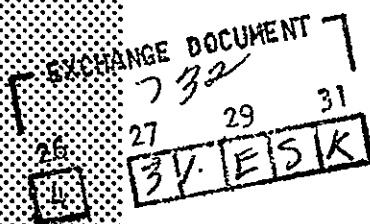
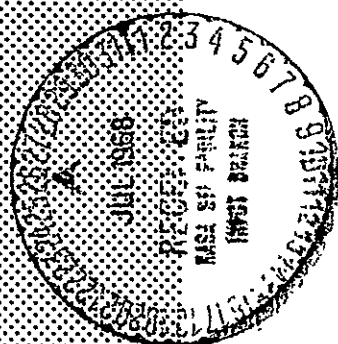
QUELQUES NOTES SUR LA TRANSFORMEE  
DE FOURIER  
DES FONCTIONS D'AUTOCORRELATION

par

*Bernard FROELICHER, Abdi DALFES*

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA - R - 3334



FACILITY FORM 602	N 68-34024	(THRU)
	39	3
	(PAGES)	(CODE)
	(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)	07
		(CATEGORY)

732

1968

Da

SERVICE CENTRAL DE DOCUMENTATION DU C.E.A

C.E.N - SACLAY B.P. n°2, 91 - GIF-sur-YVETTE - France

A partir de 1968, les rapports CEA sont classés selon les catégories qui figurent dans le plan de classification ci-dessous et peuvent être obtenus soit en collections complètes, soit en collections partielles d'après ces catégories.

Ceux de nos correspondants qui reçoivent systématiquement nos rapports à titre d'échange, et qui sont intéressés par cette diffusion sélective, sont priés de se reporter à la lettre circulaire CENS/DOC/67/4690 du 20 décembre 1967 que nous leur avons adressée, et qui précise les conditions de diffusion.

A cette occasion nous rappelons que les rapports CEA sont également vendus au numéro par la Direction de la Documentation Française, 31, quai Voltaire, Paris 7e.

#### PLAN DE CLASSIFICATION

- |   |   |
|---|---|
| 1. APPLICATIONS INDUSTRIELLES DES ISOTOPES ET DES RAYONNEMENTS  | 8. PHYSIQUE   |
|   | 8.1 Accélérateurs   |
|   | 8.2 Electricité, électronique, détection des rayonnements             |
|   | 8.3 Physique des plasmas  |
|   | 8.4 Physique des états condensés de la matière                        |
|   | 8.5 Physique corpusculaire à haute énergie                            |
|   | 8.6 Physique nucléaire  |
|   | 8.7 Electronique quantique, lasers                                    |
| 2. BIOLOGIE ET MEDECINE   | 9. PHYSIQUE THEORIQUE ET MATHEMATIQUES                                |
| 2.1 Biologie générale   |   |
| 2.2 Indicateurs nucléaires en biologie                          |   |
| 2.3 Médecine du travail   |   |
| 2.4 Radiobiologie et Radioagronomie                             |   |
| 2.5 Utilisation des techniques nucléaires en médecine           |   |
| 3. CHIMIE   | 10. PROTECTION ET CONTROLE DES RAYONNEMENTS. TRAITEMENT DES EFFLUENTS |
| 3.1 Chimie générale   | 10.1 Protection sanitaire   |
| 3.2 Chimie analytique   | 10.2 Contrôle des rayonnements  |
| 3.3 Procédés de séparation                                      | 10.3 Traitement des effluents   |
| 3.4 Radiochimie   |   |
| 4. ETUDES DU DOMAINE DE L'ESPACE                                | 11. SEPARATION DES ISOTOPES   |
| 5. GEOPHYSIQUE, GEOLOGIE, MINERALOGIE ET METEOROLOGIE           | 12. TECHNIQUES  |
| 6. METAUX, CERAMIQUES ET AUTRES MATERIAUX                       | 12.1 Mécanique des fluides - Techniques du vide                       |
| 6.1 Fabrication, propriétés et structure des matériaux          | 12.2 Techniques des températures extrêmes                             |
| 6.2 Effets des rayonnements sur les matériaux                   | 12.3 Mécanique et outillage   |
| 6.3 Corrosion   |   |
| 7. NEUTRONIQUE, PHYSIQUE ET TECHNOLOGIE DES REACTEURS           | 13. UTILISATION ET DEVELOPPEMENT DE L'ENERGIE ATOMIQUE                |
| 7.1 Neutronique et physique des réacteurs                       | 13.1 Centres d'études nucléaires, laboratoires et usines              |
| 7.2 Refroidissement, protection, contrôle et sécurité           | 13.2 Etudes économiques, programme                                    |
| 7.3 Matériaux de structure et éléments classiques des réacteurs | 13.3 Divers (documentation, administration, législation, etc...)      |

*Les rapports du COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE sont, à partir du n° 2200, en vente à la Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation, 31, quai Voltaire, PARIS VIIème.*

*The C.E.A. reports starting with n° 2200 are available at the Documentation Française, Secrétariat Général du Gouvernement, Direction de la Documentation. 31, quai Voltaire. PARIS VIIème.*

Rapport CEA-R-3334 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Département d'Electronique Générale  
Service d'Electronique des Réacteurs

QUELQUES NOTES SUR LA TRANSFORMEE DE FOURIER  
DES FONCTIONS D'AUTOCORRELATION

par

Bernard FROELICHER , Abdi DALFES

- Janvier 1968 -

## QUELQUES NOTES SUR LA TRANSFORMEE DE FOURIER DES FONCTIONS D'AUTOCORRELATION

### 1 - INTRODUCTION

Deux méthodes peuvent servir à calculer la transformée de Fourier, c'est-à-dire le spectre de fréquence, des fonctions d'autocorrélation.

La première, basée sur une intégration numérique selon la règle des trapèzes, de Simpson ou de Weedle, sera traitée en détail dans ce qui suit.

La seconde consiste à développer la fonction d'autocorrélation en une série de fonctions orthonormales et à prendre la somme des transformées de Fourier, généralement connues, des termes de la série. Le système de fonctions orthonormales à choisir dépend de la forme de la fonction d'autocorrélation, et comme règle générale, le système qui, pour une approximation donnée, nécessite un nombre minimum de termes est à choisir. La périodicité et les petites fluctuations quasi-périodiques dues au pas fini et à l'intervalle fini d'intégration numérique, n'apparaissent plus dans le spectre de fréquence, lors de l'application de cette seconde méthode.

### 2 - LA TRANSFORMEE DE FOURIER DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION

Pour simplifier la présentation on supposera que la règle des trapèzes est appliquée pour l'intégration numérique de la fonction d'autocorrélation  $\varphi(\tau)$ . Cette fonction étant réelle et paire, le spectre de fréquence  $P(\omega)$  est donné par la formule :

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{n=0}^N \varphi(n \Delta \tau) \cos \omega n \Delta \tau \quad (2.1)$$

où  $\Delta \tau$  est le pas de l'intégration qui s'étend de  $\tau = 0$  à  $\tau = N \Delta \tau$ .

Les irrégularités, en particulier les périodicités qui apparaissent dans  $P(\omega)$ , sont plus faciles à mettre en évidence si l'on développe  $\varphi(\tau)$  en une série de fonctions exponentielles orthonormales [1]. Comme précisé dans la référence mentionnée, ce développement correspond à écrire  $\varphi(\tau)$  comme suit :

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k \alpha \tau} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, interchangeant l'ordre des sommations .

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{n=0}^N e^{-k \alpha n \Delta \tau} \cos \omega n \Delta \tau \quad (2.3)$$

Désignons par  $\text{Re}$  la partie réelle d'un nombre complexe ; alors

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \text{Re} \left[ \sum_{n=0}^N e^{-(k\alpha + i\omega)n \Delta \tau} \right] \quad (2.4)$$

La seconde somme étant une série géométrique, on obtient :

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \text{Re} \left[ \frac{1 - e^{-(k\alpha + i\omega)(N+1) \Delta \tau}}{1 - e^{-(k\alpha + i\omega) \Delta \tau}} \right] \quad (2.5)$$

Le calcul de la partie réelle de la fraction est aisé. Posons :

$$\xi_k = e^{-k \alpha \Delta \tau} < 1 ; \quad (2.6)$$

on obtient alors

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[ \frac{1 - \xi_k \cos \omega \Delta \tau}{1 - 2 \xi_k \cos \omega \Delta \tau + \xi_k^2} + \xi_k^{N+1} \frac{(\xi_k - \cos \omega \Delta \tau) \cos \omega N \Delta \tau + \sin \omega \Delta \tau \sin \omega N \Delta \tau}{1 - 2 \xi_k \cos \omega \Delta \tau + \xi_k^2} \right] \quad (2.7)$$

Considéré comme fonction de la variable  $\omega$ , chaque terme de la série (2.7) présente deux périodicités, indépendantes de  $\xi_k$ , donc de  $k$ . Par conséquent  $P(\omega)$  présentera aussi, en général, ces deux périodicités, quel que soit d'ailleurs le système de fonctions ortho-normales choisi pour exprimer  $\varphi(\tau)$ .

La première périodicité, due au pas fini de l'intégration, provient du dénominateur des termes de (2.7). Pour  $\omega \Delta \tau = 0, 2\pi, 4\pi; \dots$  le dénominateur passe par un minimum et  $P(\omega)$  devient :

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{[1 - \xi_k^{N+1}]}{1 - \xi_k} \quad (2.8)$$

Pour  $\omega \Delta \tau = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$  on obtient :

$$P(\omega) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{[1 - (-\xi_k)^{N+1}]}{1 - (-\xi_k)} \quad (2.9)$$

Il n'est pas possible de dire, a priori, si c'est (2.8) ou (2.9) qui correspond à un maximum de  $P(\omega)$ . Mais ce qui est certain c'est que  $P(\omega)$  a des extremums distants de  $\omega_1 = \frac{\pi}{\Delta \tau}$ .  $\omega_1$  est appelé la fréquence (angulaire) de Nyquist .

Superposées à cette périodicité, il y a des fluctuations quasi-périodiques dans  $P(\omega)$  dont la période est déterminée par  $N$ , c'est-à-dire la longueur finie de l'intervalle de l'intégration. En effet considérons deux valeurs  $\omega'$  et  $\omega''$  de  $\omega$ , assez voisines l'une de l'autre, et telles que la différence  $\Delta\omega = \omega' - \omega''$  satisfait à  $\Delta\omega N \Delta\tau = 2\pi$ . Alors  $\cos \omega N \Delta\tau$  et  $\sin \omega N \Delta\tau$  reprennent les mêmes valeurs et,  $N$  étant grand par rapport à 1,  $\cos \omega \Delta\tau$  et  $\sin \omega \Delta\tau$  ne varient pas beaucoup. Par conséquent le numérateur et le dénominateur de chaque terme de (2.7) varient aussi très peu, de sorte que  $P(\omega') \cong P(\omega'')$  pour  $\omega' - \omega'' = \Delta\omega = \frac{2\pi}{N \Delta\tau}$ . Ces fluctuations sont, comme la périodicité de Nyquist, indépendantes, en général, du développement de  $\varphi(\tau)$  en série de fonctions orthonormales.

### 3 - LISSAGE DU SPECTRE DE FREQUENCE

On peut remédier à la périodicité de Nyquist en abandonnant l'intégration numérique et en appliquant la seconde méthode énoncée dans l'introduction. Mais il est à remarquer que, même en adoptant la méthode d'intégration numérique, il est toujours possible de choisir le pas  $\Delta\tau$  de l'intégration tel que le premier extremum, donné par  $\omega_1 = \frac{\pi}{\Delta\tau}$ , soit rejeté bien au delà de la région d'intérêt du spectre de fréquence.

Pour remédier aux fluctuations de période  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N \Delta\tau}$  on peut recourir à deux procédés. Le premier, qui n'est d'ailleurs pas toujours applicable, consiste à pousser l'intégration jusqu'à une valeur de  $\tau$ , donc de  $N$ , telle que  $\varphi(\tau)$  devient, au delà de cette valeur, identiquement nul. En effet dans ce cas les  $\xi_k^{N+1}$  dans (2.7) étant nuls, les fluctuations dues à  $\cos \omega N \Delta\tau$  et  $\sin \omega N \Delta\tau$  disparaissent complètement. Comme d'après (2.6)  $\xi_k = (\xi_1)^k$ , il suffit que  $e^{-(N+1)\alpha \Delta\tau}$  soit négligeable par rapport à 1.

Le second procédé consiste à remplacer  $P(\omega)$  par une moyenne pondérée, judicieusement choisie, des valeurs correspondant à des fréquences voisines. Plus précisément  $P(\omega)$  est remplacé par :

$$P^*(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^q a_j \left[ P\left(\omega + j \frac{\Delta\omega}{2}\right) + P\left(\omega - j \frac{\Delta\omega}{2}\right) \right] \quad (3.1)$$

avec :

$$\sum_{j=0}^q a_j = 1 \quad (3.2)$$

La condition (3.2) assure l'invariance de  $P(\omega)$  lorsque  $\Delta\omega = 0$  (temps infini d'intégration), tandis que les coefficients  $a_j$  sont choisis tels que la courbe lissée conserve ses propriétés caractéristiques [2].

Il est possible de montrer que la formule (3.1) élimine, en partie, les fluctuations de  $P(\omega)$ . Pour simplifier la démonstration nous ne considérerons que les cas où  $q = 2$ . Dans le cas du "hanning"  $a_0 = 0,50$  et  $a_1 = 0,50$ , tandis que pour le hamming  $a_0 = 0,54$  et  $a_1 = 0,46$ .

Pour des valeurs de  $\omega$  voisines d'une valeur donnée,  $\omega_0$  par exemple, (2.7) permet d'exprimer  $P(\omega)$  sous la forme :

$$P(\omega) \cong C(\omega_0) + A(\omega_0) \cos\left(2\pi \frac{\omega}{\Delta\omega}\right) + B(\omega_0) \sin\left(2\pi \frac{\omega}{\Delta\omega}\right), \quad (3.3)$$

ou :

$$A(\omega_0) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k^{N+1} \frac{\xi_k - \cos \omega_0 \Delta \tau}{1 - 2 \xi_k \cos \omega_0 \Delta \tau + \xi_k^2} \quad (3.4.a)$$

$$B(\omega_0) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k^{N+1} \frac{\sin \omega_0 \Delta \tau}{1 - 2 \xi_k \cos \omega_0 \Delta \tau + \xi_k^2} \quad (3.4.b)$$

$$C(\omega_0) = 2 \Delta \tau \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1 - \xi_k \cos \omega_0 \Delta \tau}{1 - 2 \xi_k \cos \omega_0 \Delta \tau + \xi_k^2} \quad (3.4.c)$$

Il est à noter que  $C(\omega_0)$  correspond au spectre de fréquence lorsque le temps d'intégration, c'est-à-dire  $N$ , tend vers l'infini.

La formule (3.1) transforme le spectre de fréquence donné par (3.3.) en :

$$P^*(\omega) = C(\omega_0) + \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j \left[ A(\omega_0) \cos 2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} + B(\omega_0) \sin 2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} \right]. \quad (3.5)$$

Si la condition :

$$\sum_{j=0}^q (-1)^j a_j = 0 \quad (3.6)$$

est satisfaite,  $P^*(\omega) = C(\omega_0)$ , c'est-à-dire le spectre de fréquence  $P^*(\omega)$  se rapproche du spectre correspondant à un temps d'intégration infini, et les fluctuations de fréquence  $\Delta \omega$  sont presque éliminées. La condition (3.6) est exacte pour le "hanning" et approchée pour le hamming.

Calcul de la formule (3.5.)

$$\begin{aligned} P(\omega) &\approx C(\omega_0) + A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) \\ P^*(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^q a_j \left[ P(\omega + j \frac{\Delta \omega}{2}) + P(\omega - j \frac{\Delta \omega}{2}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^q a_j \left[ C(\omega_0) + A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega + j \frac{\Delta \omega}{2}}{\Delta \omega}) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega + j \frac{\Delta \omega}{2}}{\Delta \omega}) \right. \\ &\quad \left. + C(\omega_0) + A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega - j \frac{\Delta \omega}{2}}{\Delta \omega}) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega - j \frac{\Delta \omega}{2}}{\Delta \omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^q a_j \left[ 2C(\omega_0) + A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} + j\pi) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} + j\pi) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} - j\pi) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} - j\pi) ] \\
 & \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} \pm j\pi) = (-1)^j \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) \\
 & \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega} \pm j\pi) = (-1)^j \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) \\
 P^*(\omega) &= \sum_{j=0}^q a_j [ C(\omega_0) + (-1)^j A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) + (-1)^j B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) ] \\
 &= C(\omega_0) \sum_{j=0}^q a_j + A(\omega_0) [ \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j ] \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) \\
 & \quad + B(\omega_0) [ \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j ] \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) \\
 & \quad \sum_{j=0}^q a_j = 1 \\
 P^*(\omega) &= C(\omega_0) + [ \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j ] [ A(\omega_0) \cos(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) + B(\omega_0) \sin(2\pi \frac{\omega}{\Delta \omega}) ] \\
 &= C(\omega_0) \quad \text{si} \quad \sum_{j=0}^q (-1)^j a_j = 0
 \end{aligned}$$

#### 4 - EXEMPLE

Deux exemples de fonctions d'autocorrélation,  $\varphi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  et  $\varphi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , traités au calculateur électronique, précisent les considérations précédentes.

##### 4.1 - Remarque sur le deuxième exemple

Lorsque la fonction d'autocorrélation est elle-même périodique on peut se demander quelle est l'influence de cette périodicité dans la transformation de Fourier.

Soit par exemple une fonction d'autocorrélation :

$$\varphi(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

Des calculs identiques à ceux effectués plus haut conduisent à une fonction  $P(\omega)$  composée de deux sommes :

$$S_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - e^{-[\alpha - j(\omega + \omega_0)](N+1)\Delta\tau}}{1 - e^{-[\alpha - j(\omega + \omega_0)]\Delta\tau}} \right\}$$

$$S_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - e^{-[\alpha - j(\omega - \omega_0)](N+1)\Delta\tau}}{1 - e^{-[\alpha - j(\omega - \omega_0)]\Delta\tau}} \right\}$$

Chaque somme possède une périodicité propre, de part et d'autre de la périodicité de Nyquist de sorte que  $\omega_1 = \frac{\pi}{\Delta\tau}$  devient en général un extremum relatif.

Lorsque dans  $P(\omega)$  l'on fait tendre  $N$  vers l'infini (afin de supprimer les petites fluctuations quasi-périodiques) les extrema apparaissent beaucoup mieux.

En effet :

$$P(\omega) = \Delta\tau \frac{1 - e^{-\alpha\Delta\tau} \cos(\omega + \omega_0)\Delta\tau}{1 + e^{-2\alpha\Delta\tau} - 2e^{-\alpha\Delta\tau} \cos(\omega + \omega_0)\Delta\tau} + \Delta\tau \frac{1 - e^{-\alpha\Delta\tau} \cos(\omega - \omega_0)\Delta\tau}{1 + e^{-2\alpha\Delta\tau} - 2e^{-\alpha\Delta\tau} \cos(\omega - \omega_0)\Delta\tau}$$

Les deux dénominateurs oscillent entre  $(1 + e^{-\alpha\Delta\tau})^2$  et  $(1 - e^{-\alpha\Delta\tau})^2$  lorsque  $(\omega + \omega_0)\Delta\tau$  et  $(\omega - \omega_0)\Delta\tau$  varient de 0 à  $k\pi$ .

#### 4.2 - Courbes

Il y a quatre groupes de courbes, chaque groupe comprend les deux fonctions d'auto-corrélation de l'exemple, ainsi que les transformées de Fourier correspondantes.

##### PREMIER GROUPE

###### Courbe 1.1

$$\alpha = 10.0 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$\Delta\tau = 0.01 \text{ seconde}$$

Nombre de points : 50

Longueur des fonctions =  $50 \times 0.01$

= 0,5 seconde

Ordonnée du 1er point de  $e^{-\alpha\tau} = 1$

Ordonnée du dernier point de  $e^{-\alpha\tau} = \exp(-\alpha \times N \times \Delta\tau)$

$$= \exp(-10 \times 50 \times 0.01) = 0.0067$$

Courbe 1.2 Transformée de Fourier de  $e^{-\alpha |\tau|}$

Ordonnées : unités arbitraires

Abscisses : linéaires croissantes de radian/seconde en radian/seconde.

Par suite les chiffres imprimés représentent en radians/seconde l'abscisse des points et la pulsation correspondante.

On retrouve bien : 1°) la pulsation de Nyquist, 1er extremum (ici minimum) à

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\Delta \tau} = 314$$

2°) les fluctuations quasi-périodiques de pulsation

$$\Delta \omega = \frac{2 \pi}{N \Delta \tau} = \frac{2 \pi}{50 \times 0.01} = 4 \pi = 12,56 \text{ radians/seconde.}$$

Courbe 1.3 Transformée de Fourier de  $e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau$

Ordonnées et abscisses identiques à celles de la courbe 1.2.

Les extrema de Nyquist apparaissent comme des extrema relatifs, surtout visibles sur le premier maximum (soit le second extremum).

$$\frac{k \pi}{\Delta \tau} \pm \omega_0 = \frac{2 \pi}{0.01} \pm 4 \pi = 628 \pm 12,56$$

DEUXIEME GROUPE

Afin d'éliminer les oscillations quasi-périodiques (premier procédé proposé au paragraphe 3) le calcul des fonctions d'autocorrélation a été poussé suffisamment loin pour que l'ordonnée du dernier point soit négligeable devant 1.

Courbe 2.1

$$\alpha = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = 4 \pi$$

$$\Delta \tau = 0.01$$

Nombre de points = 628

Longueur des fonctions =  $628 \times 0.01 = 6,28$  secondes

$$\begin{aligned} \text{Ordonnée du dernier point de } e^{-\alpha \tau} &= \exp(-\alpha N \Delta \tau) \\ &= \exp(-10 \times 628 \times 0.01) \\ &\approx 10^{-27} \end{aligned}$$

Le pas de traçage de l'imprimante n'est pas suffisamment fin pour rendre compte de la décroissance des deux courbes. Tous les points à partir du n° 65 sont considérés comme nuls. En fait il n'en est pas ainsi dans les calculs des spectres.

Courbe 2.2.

Cette courbe est identique à la courbe 1.2 ; on note la disparition des petites oscillations quasi-périodiques.

En fait, pour obtenir un résultat acceptable il n'est pas nécessaire de pousser le calcul de la fonction d'autocorrélation aussi loin qu'il l'a été ici.

Le nombre de points élevé de  $e^{-\alpha|\tau|}$  (628) a été choisi afin que le résultat soit très net.

### Courbe 2.3

Transformée de Fourier de  $e^{-10|\tau|} \cos 4\pi|\tau|$ , comparable à la courbe n° 1.3

## TROISIEME GROUPE

La définition de la fonction d'autocorrélation ( $e^{-\alpha|\tau|}$  et  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0|\tau|$ ) a été choisie de telle sorte que le 1er extremum de la périodicité de Nyquist soit rejeté bien au delà de la région d'intérêt, mais que les petites fluctuations périodiques soient conservées.

Dans ce but le pas  $\Delta\tau$  a été diminué et le nombre de points augmenté dans le même rapport afin que la longueur totale des fonctions d'autocorrélation soit conservée.

### Courbe 3.1

$$\alpha = 10.0 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = 4\pi \text{ radians/seconde}$$

$$\Delta\tau = 0.001 \text{ seconde}$$

$$\text{Nombre de points} = 500$$

$$\text{Longueur de la fonction } e^{-\alpha\tau} = 500 \times 0.001 = 0.5 \text{ seconde}$$

La courbe tracée possède 550 points : les 50 derniers points ont une ordonnée nulle et indiquent la position de l'axe des abscisses.

### Courbe 3.2

Ordonnées arbitraires.

Abscisses en radians par seconde. Distance entre deux points consécutifs : 8 radians/seconde, par suite les chiffres portés le long de l'axe horizontal sont à multiplier par 8 si l'on désire obtenir la pulsation.

Calcul du 2ème extremum de Nyquist :

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{\Delta\tau} = \frac{2\pi}{0.001} = 6283 \text{ radians/seconde}$$

Sur la courbe on voit que cet extremum se situe aux alentours du point n° 786 soit environ  $786 \times 8 = 6288 \text{ radians/seconde}$ .

Les petites fluctuations ne sont pas régulières car le pas de l'axe des abscisses (8 radians/seconde) n'est pas assez fin.

### Courbe 3.3

Transformée de  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0|\tau|$  cette courbe est comparable à celles n° 1.3 et 2.3

#### QUATRIEME GROUPE

Le second procédé d'élimination des fluctuations quasi-périodiques (proposé au paragraphe 3) a été utilisé ici.

Les fonctions d'autocorrélation ont été multipliées par :

$$f(t) = 0.42 + 0.50 \cos \frac{\pi \tau}{T} + 0.08 \cos \frac{2 \pi \tau}{T} \quad (4)$$

$T = N \Delta \tau$  = longueur des fonctions à transformer.

Cette multiplication correspond à un lissage du spectre selon la relation (2) suivante :

$$P^*(\omega) = 0.42 P(\omega) + 0.25 \left[ P\left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2}\right) + P\left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2}\right) \right] + 0.04 \left[ P(\omega + \Delta \omega) + P(\omega - \Delta \omega) \right] \quad (5)$$

Dans ce cas  $\sum_{j=0}^q (-1)^j a_j = 0.42 - 0.50 + 0.08 = 0$  et, par conséquent, l'amplitude des

fluctuations est très diminuée.

Le pas  $\Delta \tau$  a été choisi suffisamment petit pour que la périodicité de Nyquist soit rejetée assez loin de la région d'intérêt.

##### Courbe 4.1

$$\alpha = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = 4 \pi \text{ rad/s}$$

Nombre de points = 500

$$\Delta \tau = 0.001$$

(Les 50 derniers points ont une ordonnée nulle et indiquent la position de l'axe horizontal).

Cette courbe est la courbe n° 3.1 multipliée par la relation (4).

##### Courbe 4.2

Courbe comparable à celle n° 3.2 (même abscisse, même périodicité de Nyquist). Le lissage réalisé par la relation (4) a effacé les petites fluctuations quasi-périodiques.

##### Courbe 4.3

Courbe comparable à celle n° 3.3

##### Courbe 4.4.

Quelques points de la courbe n° 4.2 ont été portés en échelle  $1/2$  logarithmique. La pente de 12 db/oct est parfaitement obtenue, ce qui montre que le lissage par le second procédé ne modifie pas trop les propriétés caractéristiques de la courbe à lisser.

## CONCLUSION

Par un choix judicieux du pas d'intégration il est possible de rejeter les extremums qui apparaissent dans le spectre de fréquence bien au delà de la région d'intérêt, tandis que la pondération des valeurs  $P(\omega)$  ou un intervalle d'intégration suffisamment long éliminent les fluctuations quasi-périodiques du spectre, tout en conservant les propriétés caractéristiques de la courbe à lisser.

*Manuscrit reçu le 20 juillet 1967*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] LEE Y.W.  
Statistical Theory of Communication,  
John Wiley and Sons, Inc., New York  
1960, pages 461-466
- [2] BLACKMAN R.B., TUKEY J.W.  
The Measurement of Power Spectra,  
Dower Publications, Inc., New York  
1959, pages 98-99

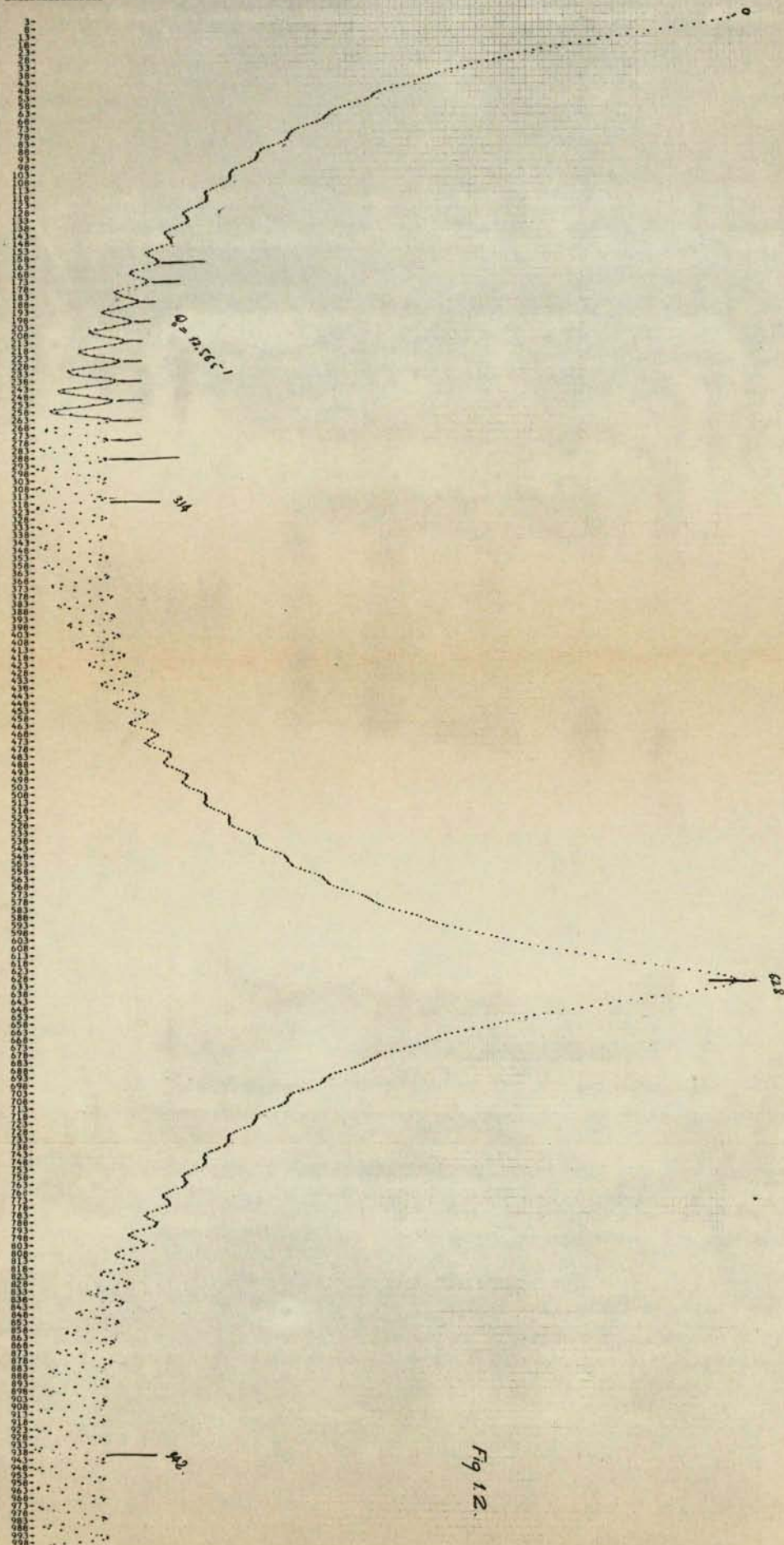
FJCB                      FORTRAN                      220  
 EXPONENTIELEDEET @SERUS\*AROREIC\*1209/SER / 012/T/00.02/003000

MAX = 1.000E 00  
 MIN = -1.095E-01

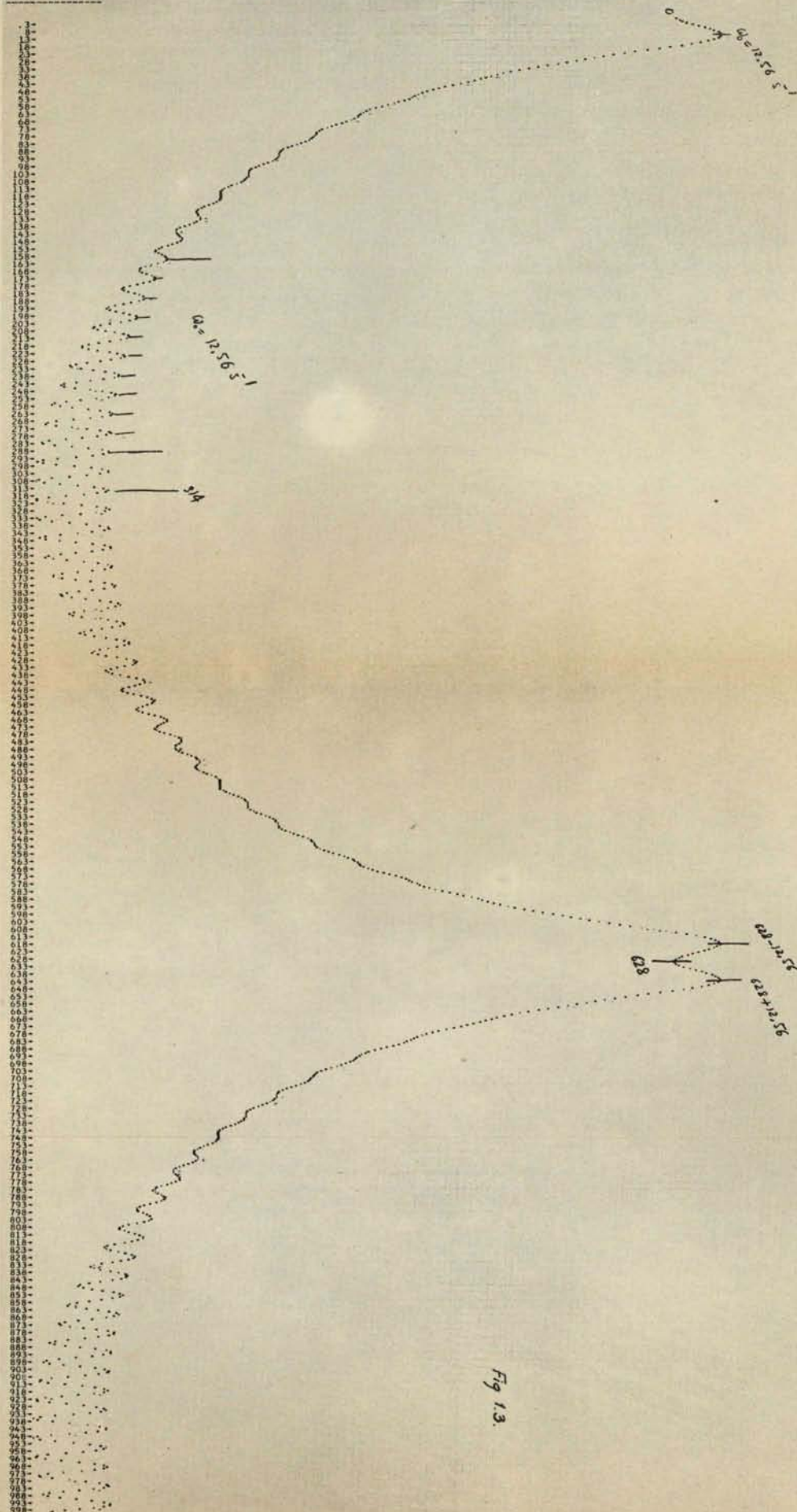
1-  
2-  
3-  
4-  
5-  
6-  
7-  
8-  
9-  
10-  
11-  
12-  
13-  
14-  
15-  
16-  
17-  
18-  
19-  
20-  
21-  
22-  
23-  
24-  
25-  
26-  
27-  
28-  
29-  
30-  
31-  
32-  
33-  
34-  
35-  
36-  
37-  
38-  
39-  
40-  
41-  
42-  
43-  
44-  
45-  
46-  
47-  
48-  
49-  
50-

Fig 11.

MAX = -2.310E 01  
MIN = -8.657E 01



MAX = -2.812E 01  
MIN = -8.544E 01



FJOB                      FORTRAN                      83  
 EXPONENTIELEEDET ##SENUS\*ANOREIC\*1209/SER / 012/T/00.07/003000

MAX = 1.000E 00  
 MIN = -1.095E-01

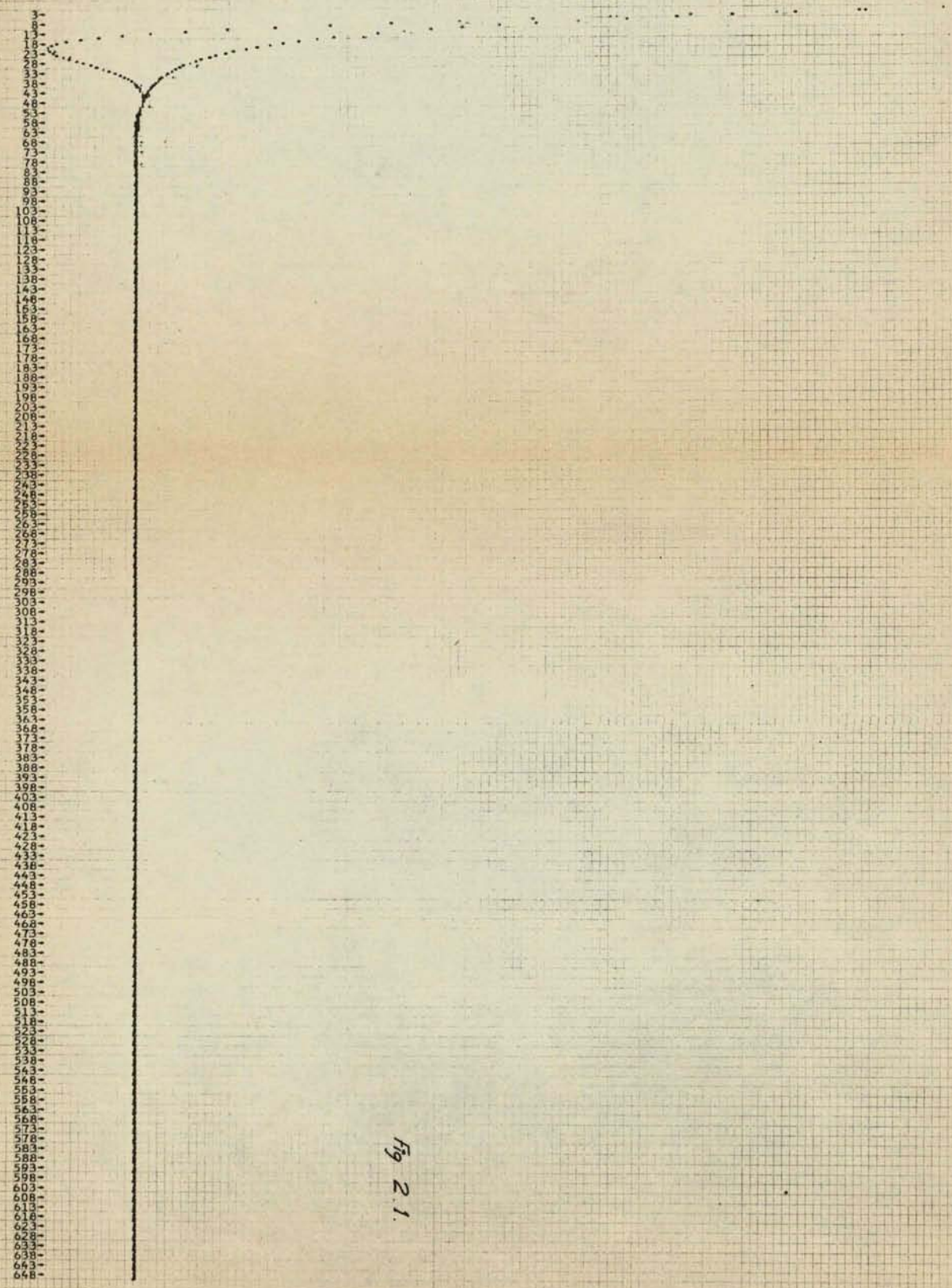


Fig 2.1.

TRANSFORMEE DE FOURIER EXPONENTIELLE

MAX = -2.303E 01  
MIN = -8.295E 01

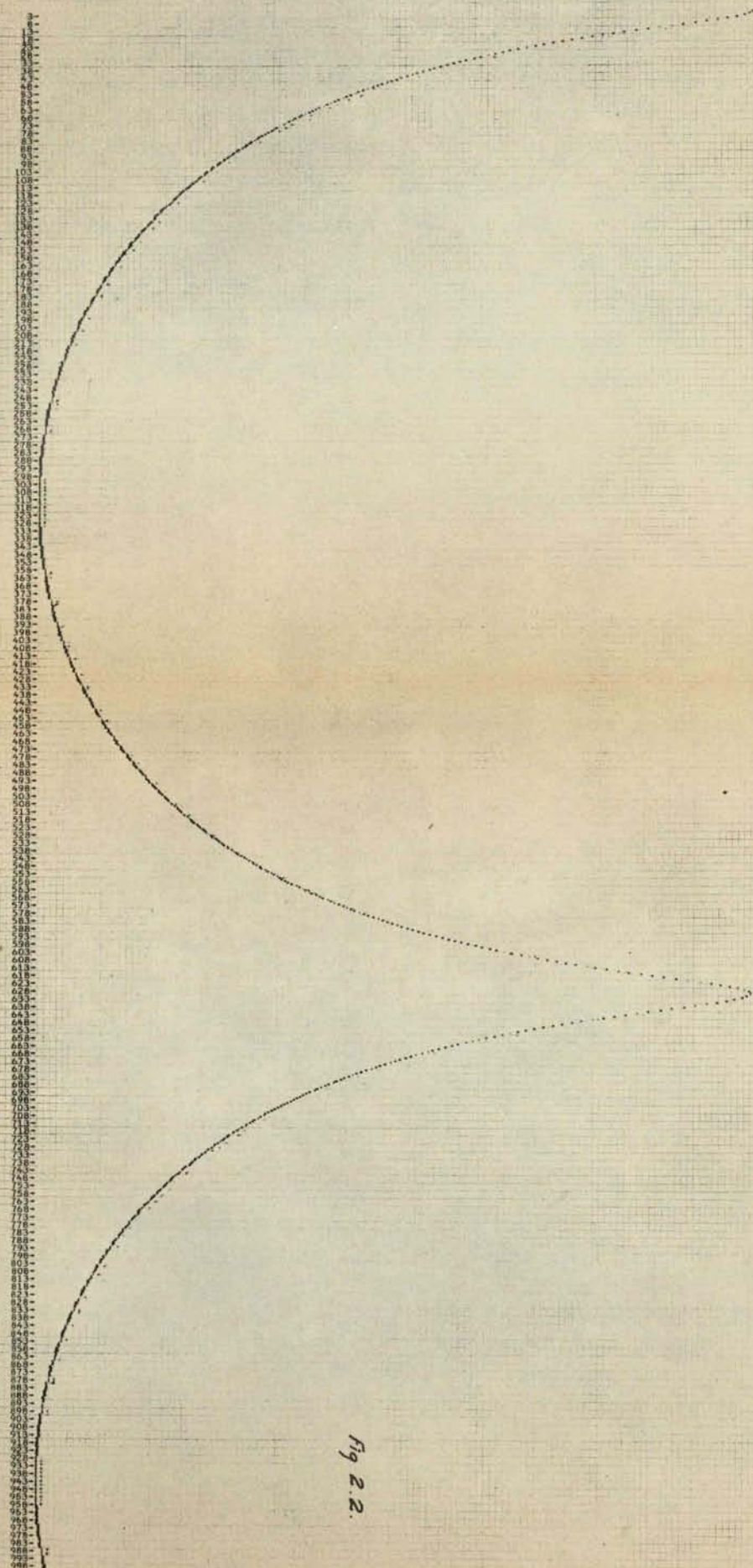
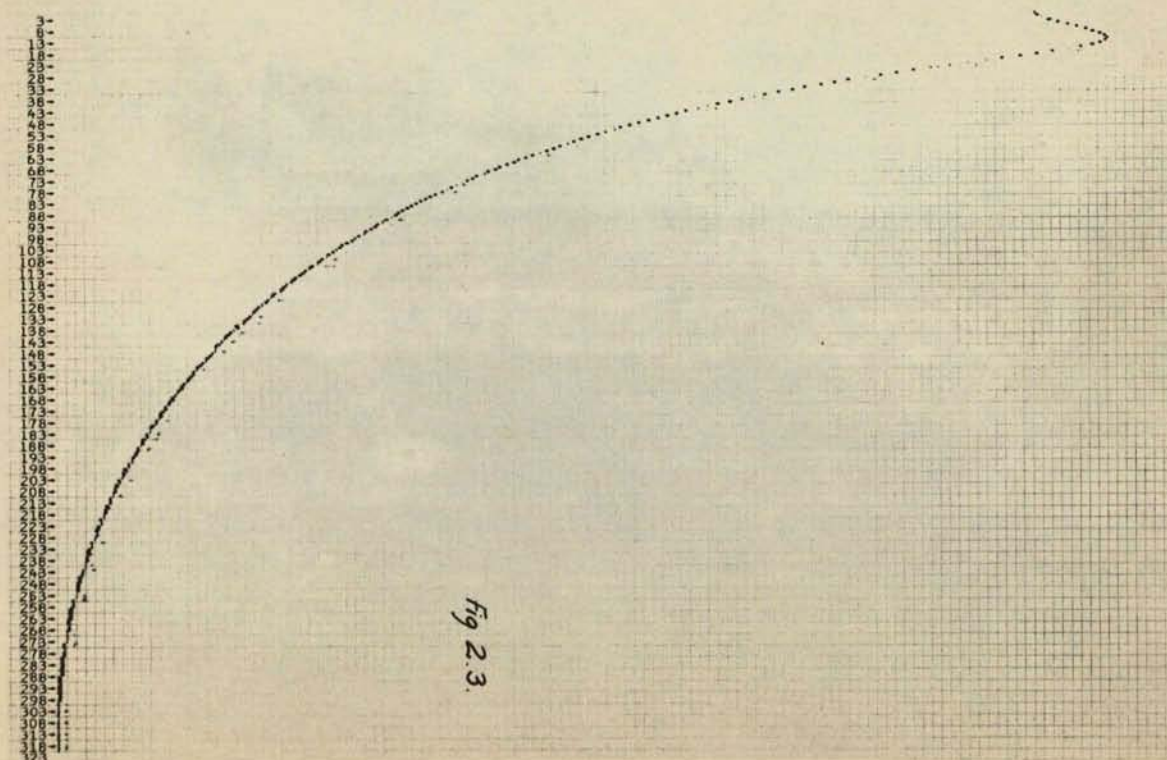


Fig 2.2.

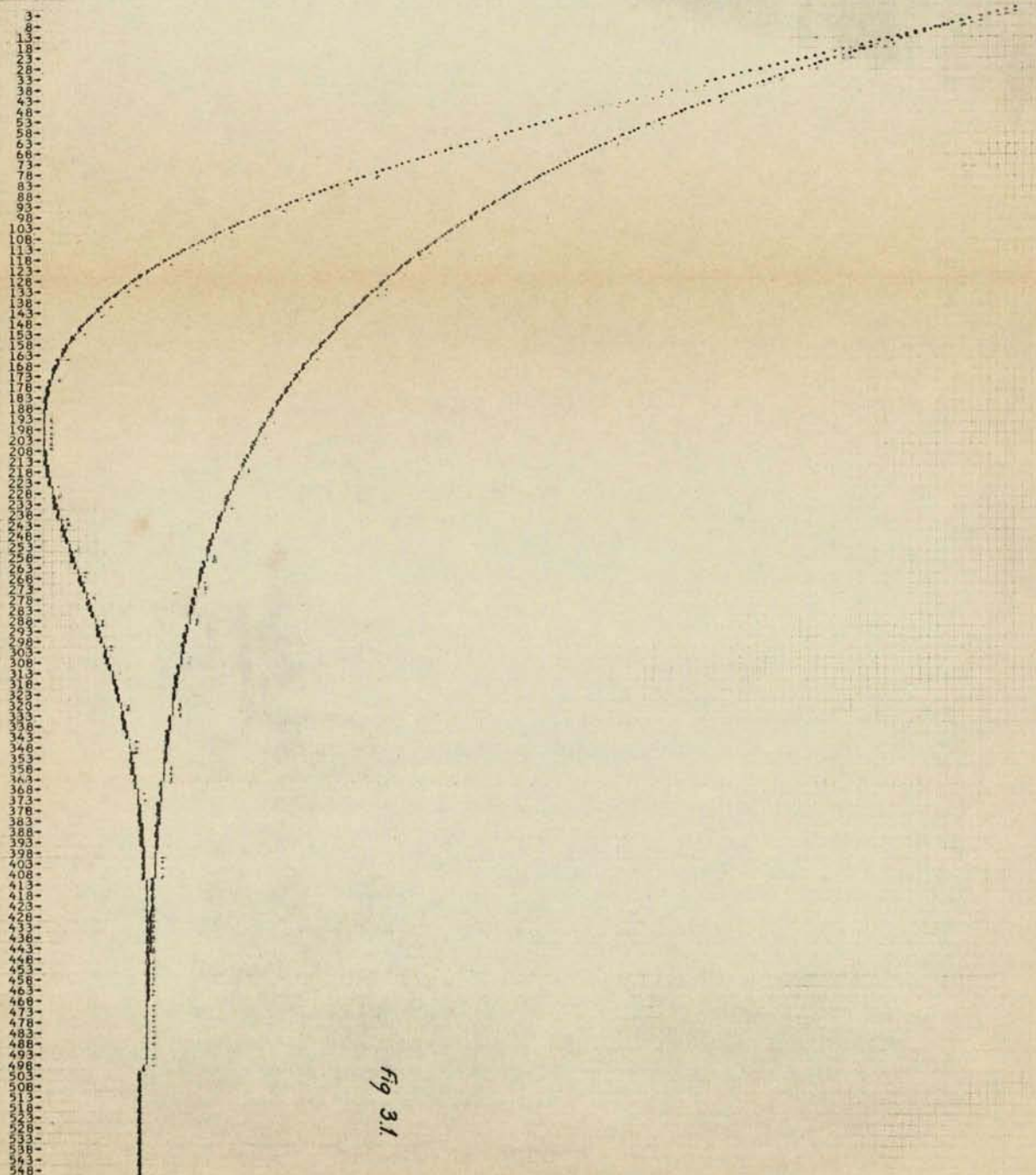
TRANSFORMEE DE FOURIER COSINUS AMORTI

MAX = -2.864E 01  
MIN = -8.291E 01

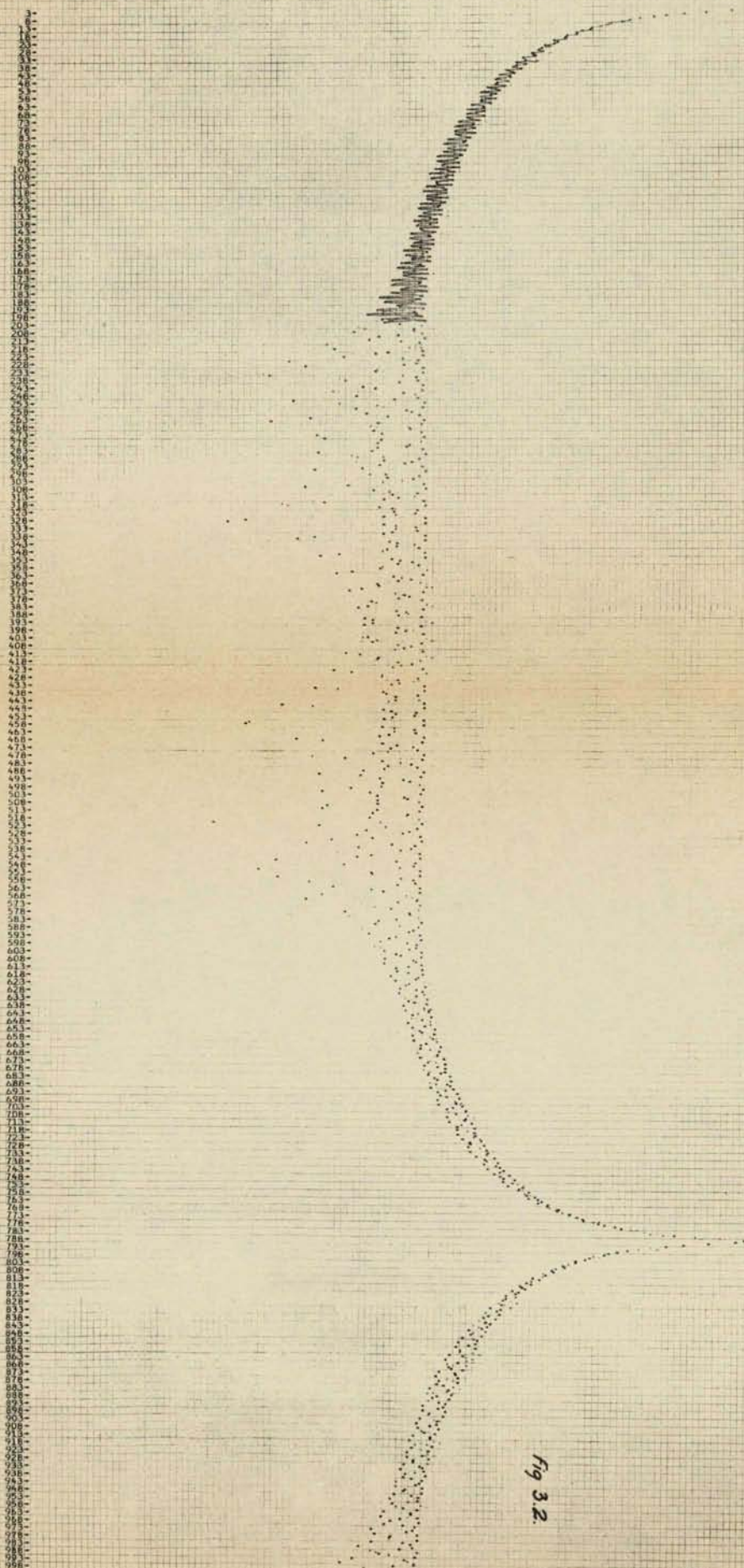


FJOB                      FORTRAN                      108  
 EXPONENTIELEDEET #05ENUS\*ANDREIC\*1209/SER / 012/T/00.07/003000

MAX = 1.000E 00  
 MIN = -1.097E-01



MAX = -2.318E 01  
MIN = -2.285E 02



TRANSFORMEE DE FOURIER COSINUS AMORTI

MAX = -2.895E 01  
MIN = -2.249E 02

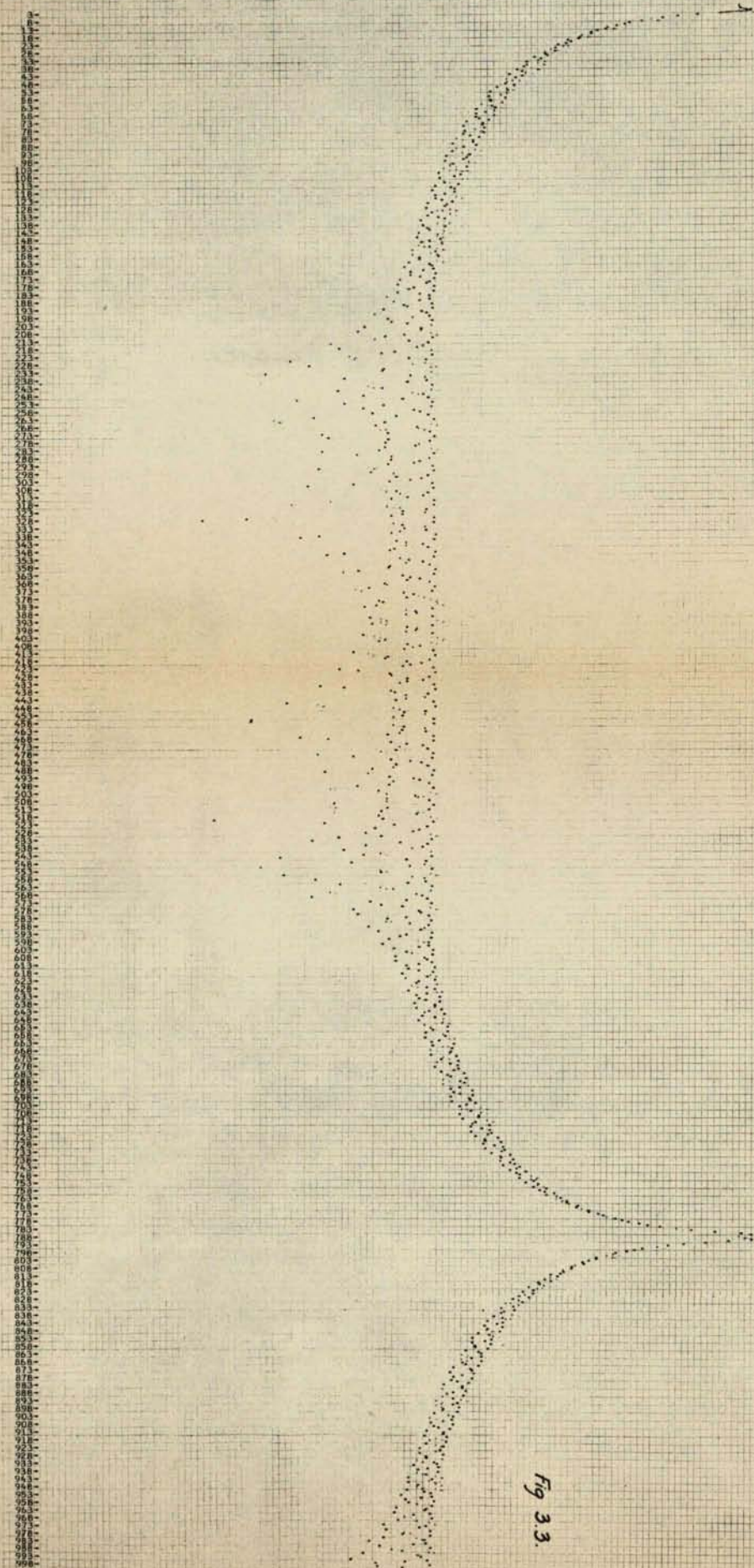


Fig 3.3.

FID \*\*SER \*FROELIC\*1209/SER / 012/T/00.05/004000  
 DIFFERENTIELLE ET COSINUS AMORTI

MAX = 10.000E-01  
 MIN = -6.125E-02

3-  
 8-  
 13-  
 18-  
 23-  
 28-  
 33-  
 38-  
 43-  
 48-  
 53-  
 58-  
 63-  
 68-  
 73-  
 78-  
 83-  
 88-  
 93-  
 98-  
 103-  
 108-  
 113-  
 118-  
 123-  
 128-  
 133-  
 138-  
 143-  
 148-  
 153-  
 158-  
 163-  
 168-  
 173-  
 178-  
 183-  
 188-  
 193-  
 198-  
 203-  
 208-  
 213-  
 218-  
 223-  
 228-  
 233-  
 238-  
 243-  
 248-  
 253-  
 258-  
 263-  
 268-  
 273-  
 278-  
 283-  
 288-  
 293-  
 298-  
 303-  
 308-  
 313-  
 318-  
 323-  
 328-  
 333-  
 338-  
 343-  
 348-  
 353-  
 358-  
 363-  
 368-  
 373-  
 378-  
 383-  
 388-  
 393-  
 398-  
 403-  
 408-  
 413-  
 418-  
 423-  
 428-  
 433-  
 438-  
 443-  
 448-  
 453-  
 458-  
 463-  
 468-  
 473-  
 478-  
 483-  
 488-  
 493-  
 498-  
 503-  
 508-  
 513-  
 518-  
 523-  
 528-  
 533-  
 538-  
 543-  
 548-

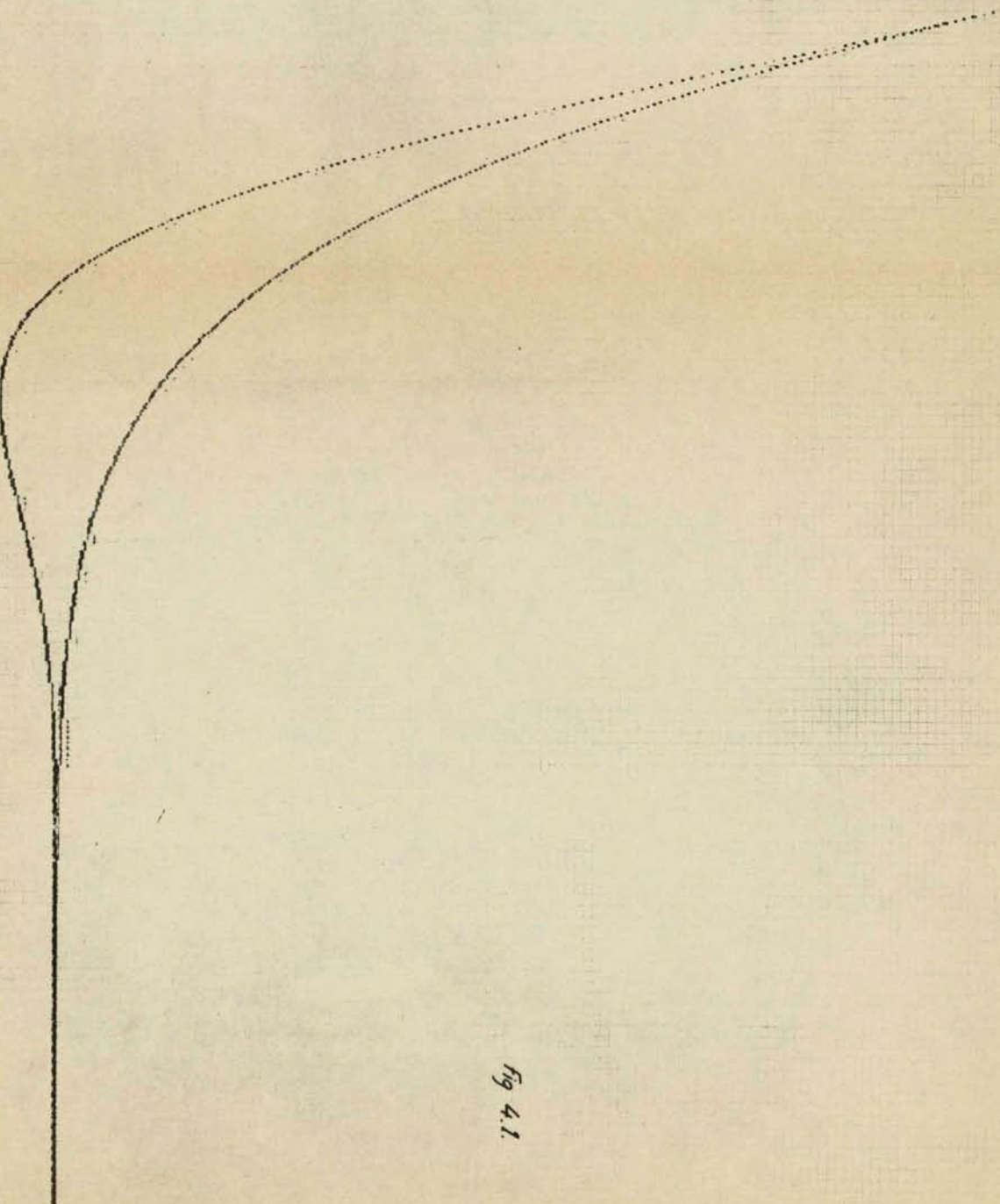


Fig 4.1

TRANSFORMEE DE FOURIER EXPONENTIELLE

MAX = -2.520E 01  
MIN = -1.290E 02

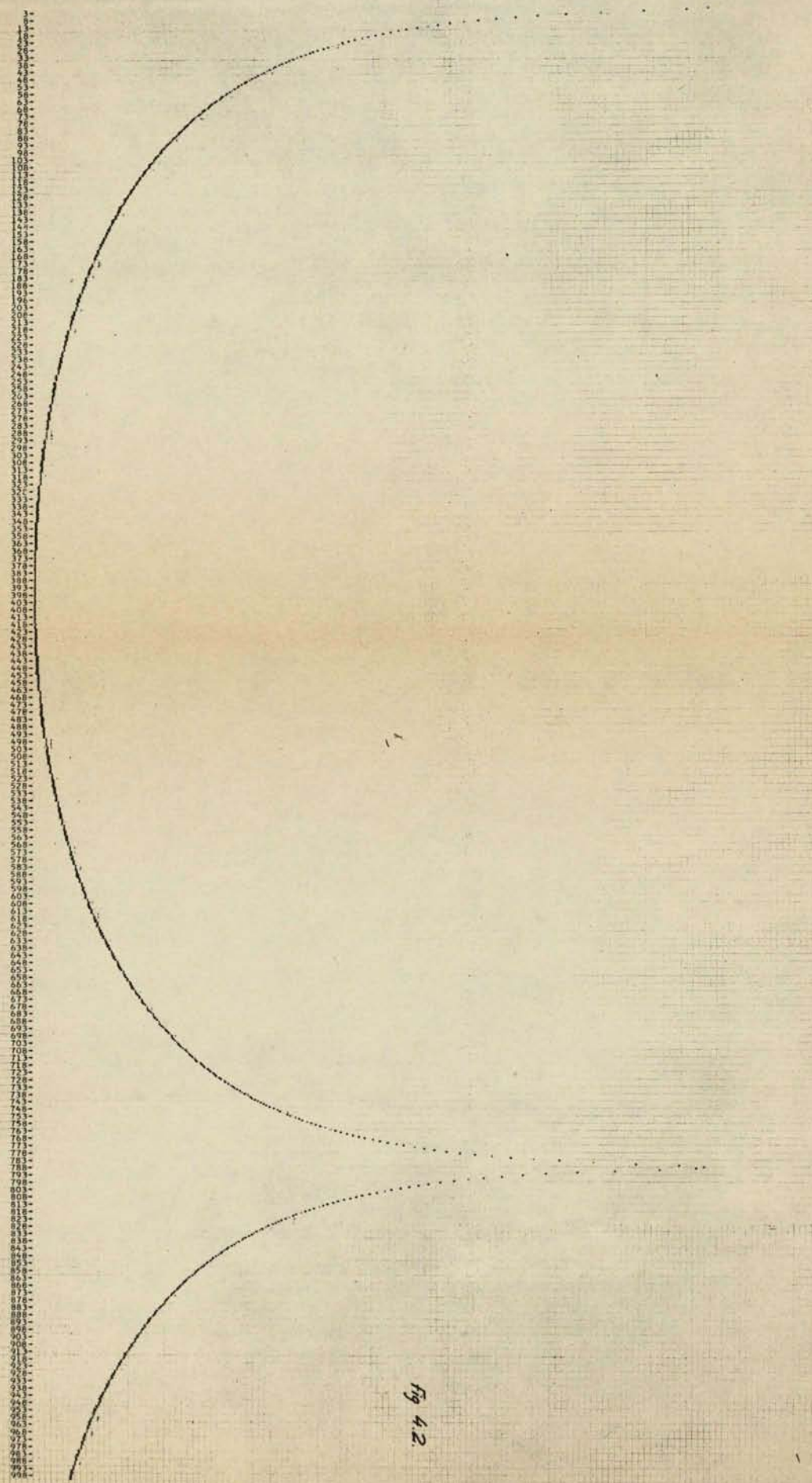


Fig 4.2

TRANSFORMEE DE FOURIER COSINUS AMORTI

MAX = -3.023E 01  
MIN = -1.290E 02

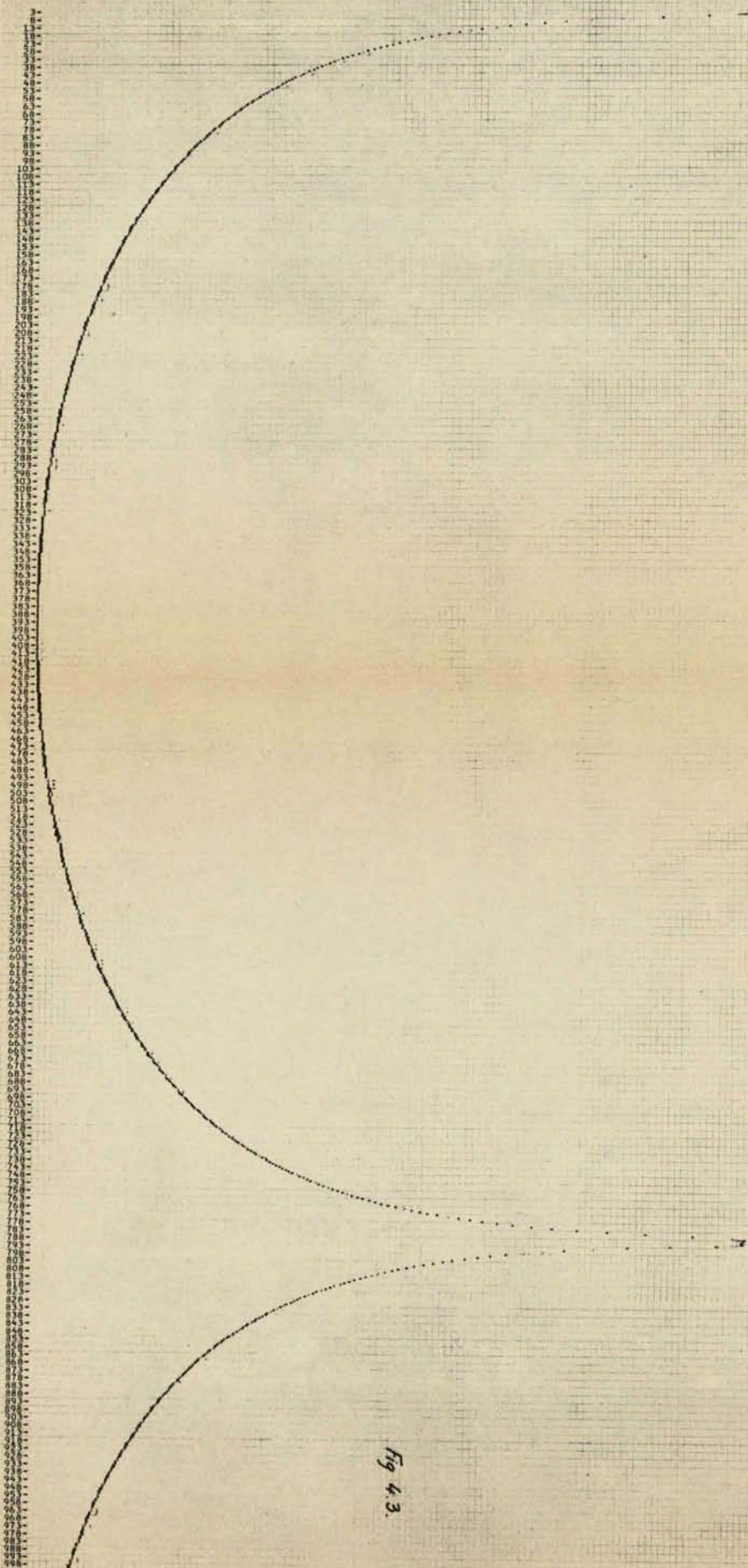


Fig 4.3.

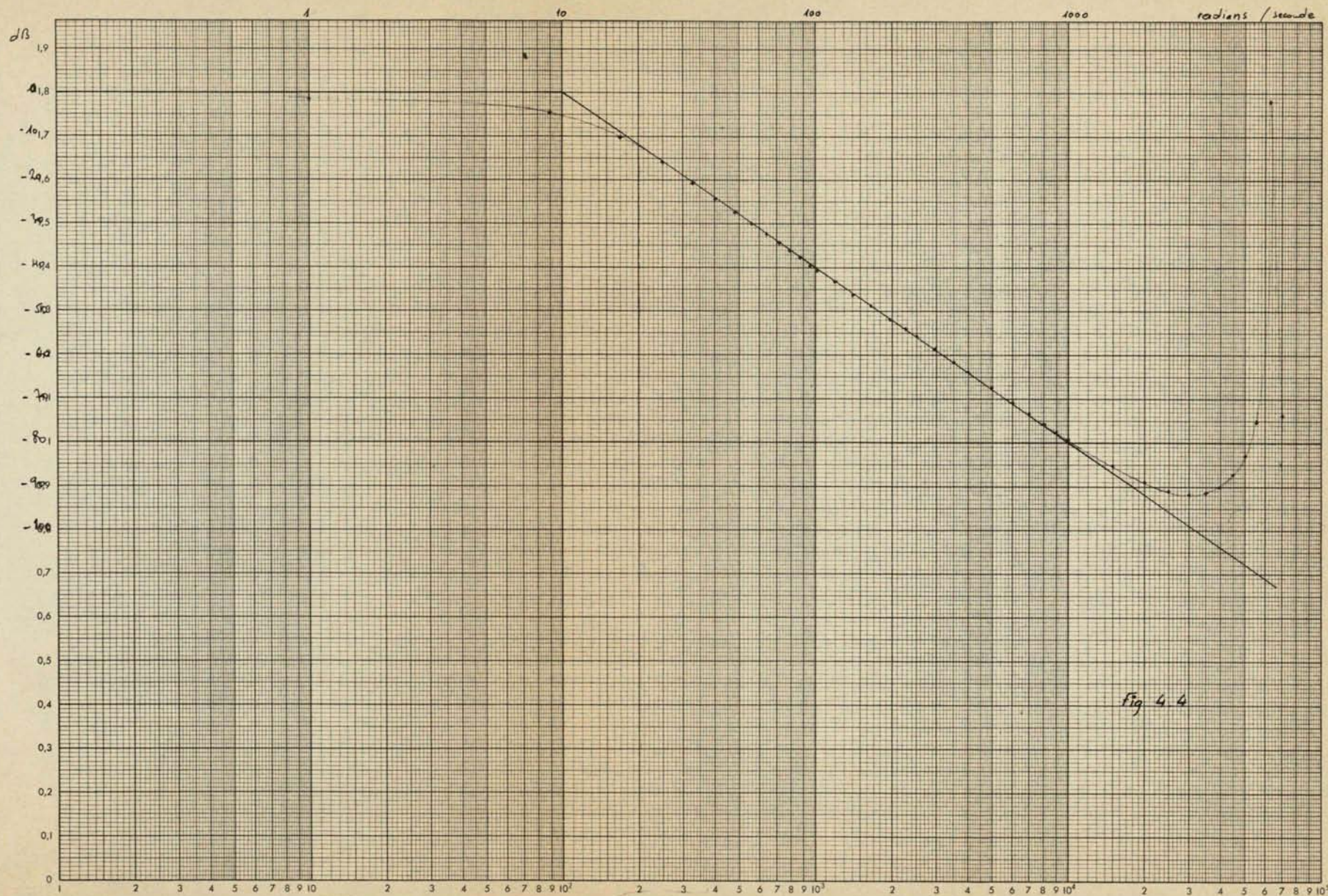


Fig 4.4

*Edité par*  
*le Service de Documentation du C.E.N.*  
*Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay*  
*Boîte Postale n° 2*  
*91 - Gif-sur-YVETTE (France)*

*La Documentation Française*  
*Secrétariat Général du Gouvernement*  
*Direction de la Documentation*  
31, quai Voltaire, PARIS VIIème. - Tél. 222.70.00