

NASA TM 70681

NE00262



SUCCESSIVE SMOOTHING ALGORITHM FOR CONSTRUCTING
THE SEMIEMPIRICAL MODEL DEVELOPED AT ONERA TO
PREDICT UNSTEADY AERODYNAMIC FORCES

D. Petot and H. Loiseau

NASA-TM-76681 19820016298

Translation of "Algorithme de lissages successifs pour la recherche du modèle semiempirique de prevision des forces aerodynamiques instantonnees developpe a l'ONERA", Office National d'Etudes et de Recherches Aerospatiales, Chatillon, France, Technical Report RT-12/1841 RY 080R, July 1981, pp. 1-30, 57-68.

LIBRARY COPY

SEP 20 1982

LANGLEY RESEARCH CENTER
LIBRARY, NASA
HAMPTON, VIRGINIA

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON, D.C. 20546 MARCH 1982

1. Report No. NASA TM-76681	2. Government Accession No.	3. Recipient's Catalog No.	
4. Title and Subtitle SUCCESSIVE SMOOTHING ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE SEMIEMPIRICAL MODEL DEVELOPED AT ONERA TO PREDICT UNSTEADY AERO-		5. Report Date March 1982	6. Performing Organization Code
		8. Performing Organization Report No.	
7. Author(s) DYNAMIC FORCES D. Petot and H. Loiseau Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques et Spaciales		10. Work Unit No.	
		11. Contract or Grant No. NASW-3541	
9. Performing Organization Name and Address Leo Kanner Associates Redwood City, California 94063		13. Type of Report and Period Covered Translation	
		14. Sponsoring Agency Code	
12. Sponsoring Agency Name and Address National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. 20546			
15. Supplementary Notes Translation of "Algorithme de lissages successifs pour la recherche du modele semiempirique de prevision des forces aerodynamiques instationnaires developpe a l'ONERA, Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques, Chatillon, France, Technical Report RT-12/1841 RY 080R, July 1981, pp. 1-30, 57-68.			
16. Abstract <p>This report concerns work carried out under Form R 212 A of the 1980 program: unsteady aerodynamic methods adopted for the study of aeroelasticity in helicopters. It involves the development of a semiempiric model of unsteady aerodynamic forces acting on an oscillating profile at high incidence. The successive smoothing algorithm developed in this report leads to the model's coefficients in a very satisfactory manner.</p> <p>This fact confirms its value and makes it now operational.</p>			
17. Key Words (Selected by Author(s)) Aeroelasticity of helicopters Unsteady aerodynamic forces in separated state		18. Distribution Statement Unlimited - Unclassified	
19. Security Classif. (of this report) Unclassified	20. Security Classif. (of this page) Unclassified	21. No. of Pages	22.

N82-24174

TABLE OF CONTENTS

1.	Introduction	1
2.	Summary of Previous Work	2
3.	Difficulties in Finding a Model	5
3.1	Choice of Model	6
3.2	Equations and Definition of Variables	7
4.	Behavior of the Model	8
4.1	Role of Different Parameters in Small Amplitude Responses	9
5.	Building a Model	13
5.1	Modeling the Static Behavior	13
5.2	Modeling in the Nonstalled Configuration	14
5.3	Modeling in the Stalled Configuration	15
5.4	Important Remarks Concerning the Choice of Smoothings	17
5.5	Summary of the Method	19
6.	Example of Modeling	19
6.1	Definition of Variables	19
6.2	Points of Measurement	20
6.3	Static Model	21
6.4	Model for the Nonstalled Configuration	22
6.5	Model for the Stalled Configuration	23
6.6	The Large Loops	27
7.	Conclusions	27
	References	[omitted]
	Appendix A: Algorithm for Finding the Coefficients in the Nonstalled Zone	29

Appendix B: Optimizing the Parameters by Minimizing a Function of Several Variables	34
Appendix C: Comparison of the Model with Real Life for the Example Used as an Illustration	38

SUCCESSIVE SMOOTHING ALGORITHM FOR CONSTRUCTING
THE SEMIEMPIRICAL MODEL DEVELOPED AT ONERA TO
PREDICT UNSTEADY AERODYNAMIC FORCES

D. Petot and H. Loiseau

Special Tests Division

Office National d'Etudes et de Recherches Aerospatiales

[Reviewed and approved by G. Coupry, Scientific Director of
Structural Strength]

[Translator's note: Neither the references nor the figures referred
to in this report are included in the translation.]

1. Introduction

/7*

The flow conditions around a helicopter blade require the use
of a model to predict the aerodynamic forces that apply to separated
states.

Practical conditions (problems concerning small amplitude motion,
or large amplitude motion at low frequency) and theoretical ones
(linearization) have led to the formulation of models in the form
of sets of differential equations that relate the parameters of
profile position to the coefficients of aerodynamic stress.

The first phase of the study consisted of showing the capacity
of such a model to reproduce the effects of small and large amplitude
vibrations [1 and 2].

In a second phase, it was necessary to find a general model-
building procedure that, starting with a set of experimental measure-
ments, covered the profile's entire operating range. This is the
subject of the present report.

All along the first two phases, the set of differential equations
evolved towards a greater ability to describe the phenomena

*Numbers in the margin indicate pagination in the foreign text.

encountered. It is still not completely fixed, and modifications that would not seriously undermine the previous work are envisionable.

The third phase will consist of making a complete aerodynamic model of a profile and applying it to cases of real helicopter flight.

2. Summary of Previous Work [1 and 2]

The most general form of the model, considering the hypotheses made, is the following:

$$\phi_q = \sum_{k=1}^3 A_{q\phi_k} \phi_k + \sum_{k=1}^3 A_{q\dot{\phi}_k} \dot{\phi}_k + \dots$$

$$= \tau^2 C_q(\alpha, \tau) - A_{q\dot{\theta}} \dot{\theta} - A_{q\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - A_{q\dot{\gamma}} \dot{\gamma} - A_{q\ddot{\theta}} \ddot{\theta} - \dots$$

for $q = 1, 3$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 correspond to coefficients of lift, moment, drag

α = instantaneous incidence at the front quarter relative to the instantaneous velocity \vec{V}

θ = incidence relative to the profile's mean velocity \vec{V}_0

$\tau = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V}_0|}$ = dimensionless velocity parameter

The A_{xy} 's are coefficients.

Model A

This model contains a large number of coefficients that have been inaccessible to theory for a long time, but whose value can be estimated from a series of experiments. Small amplitude sinusoidal vibrations are obvious candidates, but other forms of motion can

also lead to interesting results.

This model can be simplified for practical applications by taking into account certain physical realities and the needs of users.

One particular model was defined on the basis of Kubner's coefficients. The system was written in the form:

$$\begin{pmatrix} bF \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_f & 0 \\ 0 & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bF \\ M \end{pmatrix} = -\pi\rho V^2 b^2 \ell \left\{ \begin{pmatrix} r_f & r_f \\ r_m & r_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta + h \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_f & T_f \\ T_m & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} + \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \right\}$$

F & M denote lift and movement

h is the dimensionless displacement along the normal

θ is the profile's rotation relative to the front quarter

Model ... B

Application to the field of helicopter flight has shown the necessity of introducing complex poles to take account of certain experimental results in the stalled region. The equations were put in a slightly different form so as to take account of the different conditions that have to be checked. This form is a little distant from the general formulation, but the basic principles are still respected.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_q = d C_{qe} + (d_s + r) \dot{\theta} + s \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + 2\alpha\gamma \dot{C}_{q_2} + \gamma^2 (1 + \alpha^2) C_{q_2} = -\delta^2 (1 + \alpha^2) [\Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Model. C

This model was applied to the lift and the moment of a profile in the OA family. The value of the different coefficients was adjusted on the basis of small amplitude vibration tests in a wind tunnel.

The module obtained was used to reconstruct large amplitude lift and moment loops that have compared very well with the experimental results.

In the rest of this report, we will use a slightly different form of these equations (see page 7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_q = d C_{qe} + (d_s + r) \dot{\theta} + s \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2} = -[r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Model. D

Apart from changes in the variables, the difference comes from the fact that a and r can take on positive values that are inaccessible to the groupings $2\alpha\gamma$ and $\gamma^2 (1 + \alpha^2)$, which permits a broader field of application (but even so, a and r must remain positive for

questions of response stability).

The second equation, which takes into account the effects of stalling, becomes operative once ΔC_q is nonzero, i.e., once the incidence reaches the static stalling angle. Experience shows that stalling does not actually occur until a little later. To take account of this fact, one can introduce the function $H(\theta, \dot{\theta})$, which is zero as long as stalling has not really occurred and unity thereafter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_{q_1} + d C_{q_1} = d C_{q_0} + (d_1 + r) \dot{\theta} + s \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + n C_{q_2} = -[r \Delta C_q + e \dot{\Delta C}_q] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Model D'

/10

Such a correction is perfectly within the spirit of the linearization that is the basis of the model: If stalling has not actually taken place beyond the static stalling angle, it is not possible to use the model, which is linearized about a separated flow.

3. Difficulties in Finding a Model

The parameters in this type of model are found by using the curves of the response to small amplitude vibratory motion as a function of frequency. The response of the model is known analytically. The parameters have to be chosen in such a way that this response is as close as possible to the measured one. There is a smoothing of the harmonic response as a function of frequency.

Now, to obtain an equation that is valid throughout a helicopter blade's whole operational range, the sets of parameters thus found must themselves be smoothed as a function of incidence and then as a

function of Mach number.

This triple complex smoothing (the harmonic response is complex: it has an amplitude and a phase relative to the original motion that created it) is difficult.

3.1 Choice of Model

One can find various model forms that reconstruct very well the harmonic response of an aerodynamic coefficient under a specific flight condition. We have retained the form in models C and D (see preceding Chapter) for the following reasons:

-- The smoothings as a function of frequency are easily accomplished because the formulas employed correspond to the general behavior of the aerodynamic coefficients. This stems from the fact that these formulas come from differential equations which have been shown to be an approximation of any linear system vibrating at small amplitude. The behavior as a function of frequency is strongly present, in amplitude and in phase. /11

-- There are not too many parameters, and it is possible to separate out the influence of several of them by means of certain simplifications that experience allows us. This is a consequence of the preceding point: The responses possess the experimental behavior, which is covered by a small family of parameters.

-- The small number of parameters we use means that each of them has a role that is very distinct from the others. When a smoothing as a function of frequency at fixed Mach and incidence is made, it reconstructs the value of each parameter corresponding to the role that it plays.

Since the natural evolution is known, the parameters themselves once again have continuous, and therefore easily smoothable, values.

(Even so, pay attention: Stalling for the incidence and the Reynolds number for the Mach number can create discontinuities.)

3.2 Equations and Definition of Variables

The dot designates the reduced time derivative. We have:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_q = d C_{qe} + (d\lambda + \tau) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2} = - [r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

In real time, the system becomes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_q' + d' C_q = d' C_{qe} + (d'\lambda' + \tau') \theta' + \lambda' \theta'' \\ C_{q_2}'' + a' C_{q_2}' + r' C_{q_2} = - [r' \Delta C_q + e' \Delta C_q'] H(\theta, \theta') \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

$$\text{with } \left| \begin{array}{l} d' = dV/b \\ \lambda' = \lambda b/V \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a' = aV/b \\ r' = rV^2/b^2 \\ e' = eV/b \end{array} \right.$$

db = Mach number

V = wind velocity

ω = real pulsatance

v = reduced pulsatance, $v = \omega b/V$

t = real time

τ = reduced time, $\tau = vt/b$

b = profile's 1/2 cord

θ = profile's position variable

θ_d : appearance of stalling

θ_o : mean position during vibration

$\tilde{\theta}$: amplitude of vibration

H = function of $\theta, \dot{\theta}$ taking on the values of 0 or 1

$H = 0$ characterizes dynamically attached flow

$H = 1$ characterizes dynamically separated flow

These flow states only correspond to static regions for $\theta = 0$.

C_q = aerodynamic coefficient (see figure 1)

$C_{q_s}(U_b, \theta)$: static value of this coefficient

$C_{q_p}(U_b, \theta)$: static value of this coefficient for an unseparated flow, but which has to be defined for the whole field covered by the model (even in regions of stalling).

characterizes stalling

/13

C_{q1} comes from the unstalled aerodynamics

C_{q2} is the correction for stalling

C_{q_o} = the mean position during a vibration

\tilde{C}_q = amplitude of the vibration

4. Behavior of the Model

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_q = d C_{q_1} + (d_1 + r) \dot{\theta} + s \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_q + a \dot{C}_q + r C_q = -[r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Conditions respected:

-- At zero frequency, one again finds $C_q = C_{q1} - \Delta C_q = C_q$ static.

-- As long as stalling does not occur, the second member of the second equation is zero and its solution is $C_{q2} = 0$. Only the first equation is active (on the condition that the initial conditions for the second equation are indeed

$C_{q2}(0) = 0$ and $\dot{C}_{q2}(0) = 0$, which is the case if the flow remained attached for long enough time that its response had the time to dampen.)

The function $H(\theta, \dot{\theta})$ is the only quantity that cannot be chosen by small amplitude tests. It makes it possible to delay stalling until some time after passing through the static stall angle, an effect which is observed in all the large experimental loops.

/14

If an infinitely small amplitude is assumed, the flow is either always separated or always attached, and the equations behave as if this function is absent.

4.1 Role of the Different Parameters in Small Amplitude Responses

We will illustrate the various roles by a typical example that refers to a lift coefficient for a vibration about the front quarter.

The values of the different coefficients are:

$$\begin{array}{lll}
 C_{qe} = 0,103 \theta & \lambda = 0.2 & \mu = 0.15 \\
 & \lambda = 0.087 & a = 1 \\
 & & e = -1
 \end{array}$$

For the nonstalled case: $\tau = 0.068$ and $\frac{\partial \Delta C}{\partial \theta} = 0$

For the stalled case: $\tau = 0$ and $\frac{\partial \Delta C}{\partial \theta} = 0.180$

(The reduction of σ in the stalled region is generally encountered with this type of coefficient.)

The harmonic responses are traced for the two configurations in figures 2 and 6.

a. Nonstalled Configuration

We make the response $C_q = C_{q_0} + \tilde{C}_q e^{j\gamma z}$ correspond to the input $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta} e^{j\gamma z}$.

We have the relationships:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}\right) = \frac{\lambda^2 \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \gamma^2 \sigma}{\lambda^2 + \gamma^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}\right) = \frac{\lambda \gamma \left(\lambda + \sigma - \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right) + \lambda \gamma^3}{\lambda^2 + \gamma^2} \end{cases}$$

Examination of the formulas above directly yields the interpretation of σ and s :

/15

σ represents the horizontal asymptote for the real part of the response $\tilde{C}_q/\tilde{\theta}$ (see curve in figure 4).

λ is the slope of the asymptote for the imaginary part of (this asymptote passes through the origin) [sic]. See the curve in figure 5.

λ modifies the fashion in which the asymptotes are approached:

small : They are approached rapidly.

large : They are approached slowly

(See the curve in figure 3.)

The formula $\operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}\right) = \left(\lambda^2 \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \gamma^2 \sigma \right) / (\lambda^2 + \gamma^2)$ shows that the entire real part is contained between its initial value $\partial C_{qe}/\partial \theta$ and its asymptotic value σ . In addition, the average value $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \sigma \right)$ is reached at the reduced frequency

In the temporal domain, λ characterizes the speed at which the steady state is established. The larger λ is, the more rapid is the response to a given level of incidence.

Our three parameters d, s, σ are to a large degree uncoupled. As in the nonseparated state that interests us here, the experimental results are of very high quality. Obtaining them does not pose any problem and leads to excellent smoothings as a function of Mach number.

b. Stalled Configuration

Using the same notation as the preceding section, the response is written:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right) &= \frac{d \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \nu^2 \sigma}{d^2 + \nu^2} + \frac{(\nu^2 - r) r + \nu^2 a e}{(\nu^2 - r)^2 + a^2 \nu^2} \frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} \\ \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right) &= \frac{d \nu (d s + \sigma - \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta}) + s \nu^3}{d^2 + \nu^2} + \frac{\nu a r + (\nu^2 - r) \nu e}{(\nu^2 - r)^2 + a^2 \nu^2} \frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} \end{aligned} \right.$$

The parameters are divided into two groups: (d, s, σ) coming from the first equation and (r, a, e) coming from the second. /16

These two groups can be treated separately because experience shows that the response of the second equation, $\tilde{C}_{q2}/\tilde{\theta}$, is preponderate over the first, $\tilde{C}_{q1}/\tilde{\theta}$, in low and medium reduced frequencies. The opposite occurs at high frequencies, where $\tilde{C}_{q2}/\tilde{\theta} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ while $\tilde{C}_{q1}/\tilde{\theta} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \sigma + j \nu s$

We deduce from this that for the first group (d, s, σ) :

- d has a negligible role (see figure 7)
- σ and s always have their asymptotical physical sense.

Notice all the same that the asymptote for the imaginary part is reached at a really high frequency (figures 8 and 9).

Role of r and a:

The first member $\ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2}$ has a classical response as a function of frequency whose minimum amplitude passes through a maximum at $\omega = \sqrt{r - a^2/2}$ (if this expression is defined, i.e., if $a < \sqrt{2r}$).

Roughly speaking, r fixes the position of the amplitude peak and a its height and width. In fact, however, the second member of the second equation also contains v and alters this simple schema. But the curves in figures 10 and 11, traced for a realistic application, show that the roles of r and a do take on their classical appearance.

Role of e (figure 12):

The second member of the second equation is the sum of two excitations: $-c \frac{d\Delta G}{d\theta} \tilde{\theta}$ and $-e \frac{d\Delta G}{d\theta} \dot{\tilde{\theta}}$. These expressions were obtained after linearization.

One can see that e makes the overall response increase, but it must be mentioned that a reduction in a has the same effect.

e differs from a by the fact that:

-- a can increase the amplitude peak, but makes it narrower at the same time. e does not change its width, but this effect is certainly not enough to classify the influence of the two variables based on a set of experimental points.

-- The value of e especially determines the phase of the amplitude maximum relative to the profile's motion. The two excitations $-c \frac{d\Delta G}{d\theta} \tilde{\theta}$ and $-fve \frac{d\Delta G}{d\theta} \dot{\tilde{\theta}}$ are 90° out of phase. The overall excitation therefore has a certain phase relative to θ . This phase keeps reappearing throughout the response of the second equation:

/17

If e is decreasing: the phase difference tends toward $-\pi/2$.

For $e = 0$: no phase difference.

For $e = \epsilon$: the phase difference is $\pi/4$.

If e increases: the phase difference tends towards $\pi/2$.

The models made up to now show that the experimental points make a good separation of the effects of a and e possible.

5. Building a Model

Four distinct steps are to be considered:

- modeling the static behavior of C_q
- modeling in the nonstalled region: finding d, λ, σ
- modeling in the stalled region: finding $d, \lambda, \sigma, \alpha, \epsilon$
- verification on large loops.

5.1 Modeling the Static Behavior

This concerns finding analytical formulas that reconstruct C_{qs} for the whole range of Mach numbers and angles of incidence. In particular, one must find an equation for the angle of stall as a function of Mach number.

This phase is more difficult than it appears. To avoid useless problems during the model-building process, it is necessary to progress with care. The model's harmonic response is going to depend strongly on $\partial C_{qs} / \partial \theta$, and one therefore has to approach this term as closely as possible. That does not pose any problems at small or very large angles of incidence. Unfortunately, once stalling appears, there is a critical region in which C_{qs} varies greatly, and therefore $\partial C_{qs} / \partial \theta$ equally so. In addition, the experimental data for this region contains large inaccuracies. The lack of precision for $\partial C_{qs} / \partial \theta$ in the critical region is in general inevitable, particularly if one is focusing on a moment. Even so, it still has to be represented as well as possible.

/1

The measurement of C_{qs} must therefore be conducted very carefully and for a large number of incidences so as to guarantee continuity in its evolution. A solution consists of using a very slow incidence ramp, which yields a continuous measurement.

The complexity of stalled aerodynamics is such that the use of a ramp of this sort is going to give a result that differs according to the ramp's direction. In the form proposed, the model cannot account for this behavior. The user will have to use a mean static curve that seems satisfactory to him.

5.2 Modeling in the Nonstalled Configuration

This concerns finding the values of the coefficients d, λ, σ of

$$\dot{C}_q + d C_q = d C_{q0} + (d\lambda + \sigma) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta}$$

throughout the nonstalled region.

Finding these values is based on the harmonic response of C_q to a small amplitude sinusoidal vibration.

For conventional linearized aerodynamic theories, this response is independent of the average profile incidence. Experience approximately confirms this fact, which induces us to use coefficients d, λ, σ that depend only on the Mach number. This simplification does not always make the equation linear, moreover, since one is sometimes led to use a nonaffine function $C_{ql}(\theta)$ (for C_m).

We saw in the preceding chapter which roles the different parameters play. The quality of the experimental results recorded in this region and the very precise physical meaning of each parameter make finding d, λ, σ easy to do manually. However, we use the algorithm described in Appendix A, which automates this process.

5.3 Modeling in the Stalled Configuration

/19

-- $H(\theta, \dot{\theta})$ is a function that we do not know how to choose for the moment. A delay depending on the magnitude of $\dot{\theta}$ when passing through the angle of stall θ_q should give good results. In fact, we use the universal delay defined by Beddoes [8] for harmonic oscillations and which has the value $\Delta t \approx sb/v_\infty$ or simply $\Delta \tau = 5$ in reduced time (exactly 4.88 with a mean deviation of 0.98 in 142 examples that were chosen by the author and had different profiles, frequencies, vibrational amplitudes, and Mach numbers).

This delay is the result of the appearance of a vortex on the leading edge, which makes the moment drop. The lift does not fall immediately, but with a mean delay of 10.8 in reduced time, still according to Beddoes, because of this vortex's transit time. However, this effect is not supposed to be taken into account by the equations.

The choice of the function $H(\theta, \dot{\theta})$ is independent of the rest of the modeling.

-- We also have to determine the values of the six coefficients $d, \lambda, \sigma, \tau, \alpha, \epsilon$ of the two equations.

Six parameters is a lot, but by referring to the preceding chapter, several simplifications are possible. We had concluded that the second equation had a dominant role, except at high frequencies, where $\tilde{C}_q/\dot{\theta}$ approached the asymptote $\sigma + j\lambda s$. The role of d in particular was negligible.

In addition, the first equation must be considered as giving C_q at nonstalled incidences, and even at incidences higher than the angle of stall. There exist artifices that delay separation: aspiration of the boundary layer or high pitching motion or, numerically, resolution of the simplified aerodynamic equations. We notice then a response that is not continuous with that obtained at lower angles of incidence. The law $C_z = 2\pi\theta$ (with θ in radians) in particular seems valid.

We will therefore try to maintain the first equation's non-stalled behavior while only making a few corrections in the parameters.

We therefore simply propose to:

/20

- extrapolate δ in the stalled zone. The experimental points cannot help to distinguish a particular behavior for δ . As we chose $\delta(\theta) = \text{const}$, the extrapolation is all done.

- slightly correct σ and s in the separated region to take account of the tendency to high frequency that experiments have supposedly shown.

If the correction does not appear on the experimental points (asymptotic behavior reached at too high a frequency, particularly for s), obviously the nonstalled values are retained.

Finding the Coefficients r, a, e

In trying to approach as closely as possible the experimental points, we define an error function equal to the sum of the squares of the errors at each point of measurement. We might at the same time assign weights to each frequency, or for the real parts relative to the imaginary ones.

The program in Annex B searches for the values of r, a, e that minimize this error for each Mach number and angle of incidence (optimization by the deflected gradient method).

We could not smooth the r 's, a 's and e 's obtained by functions of the Mach number and incidence. However, the smoothings that can be done are difficult and lead to poor results because of the dispersion of the optimized values of $r, a, \text{ and } e$.

The action of the three variables must be separated, as described in the preceding chapter.

The peak $\tilde{C}_q/\tilde{\theta}$ response is the feature of the most reliable curve, measured experimentally. It changes little from one angle of incidence to another, and from one Mach number to another. We have said that its position was mainly defined by r , and equally by a , which especially affects its height.

We will therefore content ourselves at first with smoothing the values of r by an expression $r(\mathcal{M}, \theta)$. The new value can be considered as a better approximation of the value of r than that obtained by gross smoothing. This is the one we will use from now on.

Still using the program in Appendix B, we then look for the optimum pair (a, e) , with r fixed at the value that was just determined. The different values of a are smoothed by an expression $a(\mathcal{M}, \theta)$. This time again, the new value of a can be considered as a better approximation of a than those obtained by gross smoothing and it will be used from now on. /21

All that remains is e , and we also will look for its optimum values smoothed as a function of \mathcal{M} and θ .

The model is thus finished.

5.4 Important Remarks Concerning the Choice of Smoothings

-- We have to find expressions in terms of incidence that are valid in the two regions, stalled and nonstalled. These expressions must not vary within the nonstalled zone, nor vary by very much at high incidences where the flow configurations resemble each other. In fact, it seems simpler to use $\Delta C_q(\theta)$ as the variable in place of θ . And as certain C_q variables have too violent a behavior, we will rather use ΔC_z , which seems the best estimate of separation.

Thus, at $\Delta C_z = 0$, we find the initial ordinate of the curves for λ , λ , τ , r , a , e that will be the value of the corresponding variable in attached flow.

-- The functions r and a must never take on negative values. That would mean that at a certain fixed incidence, the profile would experience forces diverging towards infinity. That would be acceptable only in the case of a cylinder, where an oscillating force spontaneously develops for certain wind velocities, but it would then be necessary to introduce nonlinear terms to prevent this force from going to infinity by establishing boundary cycles. (All this is developed by Szechenyi [3].)

-- We cannot isolate the behavior of the first equation in the separated region, and it was necessary to suppose that it did not change significantly. Similarly, the behavior of the second equation is not accessible in the nonseparated zone.

Now, when the flow reattaches, the excitation of the second equation cancels out, but not C_{q2} : The second equation continues to respond as long as C_{q2} is not dampened, which occurs in a manner that depends on r and a .

We therefore also have to define r and a in the attached region, /22 but small amplitude vibrations cannot inform us in this matter.

Special experiments are necessary, for example, with levels of high amplitude incidence between the stalled and nonstalled regions. The manner in which the steady state is established depends on r and a .

Up to now, we have used large oscillations in incidence centered on the angle of stall. The fashion in which reattachment occurs during the large loops also depends on r and a , but in a more complicated way.

A little groping and, of course, the continuity condition for r and a at the beginning of separation (but this criterion is not very precise) has led us to use up to now:

$$r = 0.0100$$

a ranging between 0.15 and 0.20.

5.5 Summary of the Method

- Model of static curves
- Model for nonstalled incidences (program in Appendix A)
- Model for stalled incidences
 - finding expressions $s(\alpha, \theta)$, $\tau(\alpha, \theta)$
 - optimizing triplets (r, a, e) , from which is deduced $r(\alpha, \theta)$
 - optimizing pairs (a, e) , from which is deduced $a(\alpha, \theta)$
 - optimizing e , from which is deduced $e(\alpha, \theta)$

The optimizations are conducted for each Mach number and angle of incidence by the program in Appendix B.

-- Verification in the large loops encroaching on the stalled region of the choice of values $r(\alpha, \Delta C_2 = 0)$ and $a(\alpha, \Delta C_3 = 0)$. Possible correction of these values with the constraint of remaining compatible with the experimental results obtained with small amplitudes.

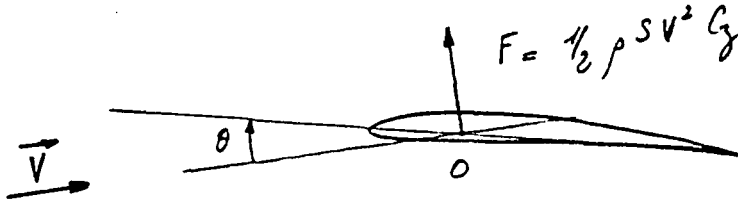
The large loops also make it possible to judge the general quality of the model and the necessity of introducing the function $H(\theta, \dot{\theta})$.

6. Example of Modeling

/23

Example concerning the lift of the OA 209 profile for pitching motion about the front quarter.

6.1 Definition of Variables



θ = the profile's incidence in degrees

C_L = coefficient of lift

ρ, μ, ν, ϵ = variables introduced to model the static layers

The other variables are defined as in chapter 3, page 7.

6.2 Points of Measurement

They were obtained by CEAT [Center for Aerodynamic and Thermal Studies] [4].

The model's field of application goes up to an angle of incidence of 20° for Mach numbers ranging between 0. and 0.3, but its extension up to Mach 0.4 should be possible.

Tests with small amplitude vibrations were made at Mach 0.12, 0.20, and 0.30 for the following mean incidences: 0° , 6° , 9° , 11° , 12° , 13° , 14° , 15° , 16° , 17° , and 18° , and even 20° for Mach 0.12.

The frequencies of vibration were:

for Mach 0.12: 1.5, 3, 5.5, 10, 15, 20, 30, and 40 Hz

for Mach 0.20: 3, 5.5, 10, 15, 20, 30, and 40 Hz

for Mach 0.30: 4, 5.5, 8, 10, 15, 20, 30, and 40 Hz

or reduced frequencies ranging between: 0.045 and 1.23 (M = 0.12)
 0.055 and 0.74 (M = 0.20)
 0.050 and 0.49 (M = 0.30)

Forty Hertz represents a physical limit for the setup that cannot be surpassed without harming the quality of the measurements. /2

This set of frequencies made it possible to get a good description of the harmonic responses necessary for finding the parameters.

6.3 Static Model

We looked for the static curves in the form:

$$C_{zs} = C_{z_0} + p_0 \theta \quad \text{for } \theta \leq \theta_d$$

$$C_{zs} = C_{z_0} + (p_1 - p_0) \theta_d + p_1 \theta + \kappa [e^{\mu(\theta - \theta_d)} - 1] \quad \text{for } \theta \geq \theta_d$$

which can be written:

$$C_{zs} = C_{z_0} + p_0 \theta + [(p_1 - p_0)(\theta - \theta_d) + \kappa (e^{\mu(\theta - \theta_d)} - 1)] H(\theta - \theta_d)$$

This curve family is interpreted in this manner (see figure 13):

- At low incidences, C_{zs} follows an affine relationship of slope p_0 .
- At very high incidences, it tends towards an asymptote of slope p_1 (and which passes through a point of abscissa θ_d and ordinate $(C_{z_0} + p_0 \theta_d - \kappa)$).
- Finally, in the stalled zone, C_{zs} tends monotonically towards its asymptote at a speed that increases as μ becomes more negative.

The values used to reconstruct the experimental curves are:

$$C_{30} = 0.03$$

$$P_0 = 0.102 / \sqrt{1 - db^2}$$

$$r_1 = 0$$

$$c = -0.55 M + 0.65$$

$$\mu = -0.3 M - 0.43$$

$$\theta_d = 1.27 / P_0 = 12.45 \sqrt{1 - db^2}$$

See the tracings in figure 14.

A bend in the experimental points is observed at the moment when stalling occurs, whereas the smoothings show a sudden stall. We did not take this curvature into account, since that would greatly complicate the formulation to achieve a negligible gain.

6.4 Model for the Nonstalled Configuration

/25

(The angle of stall is given by the formula $\theta_d = 12.45 \sqrt{1 - db^2}$).

The program in Appendix 1 enables one to find the set of parameters (d, δ, σ) that makes for the best least squares approximation at each Mach number.

A problem sometimes arises: The optimum curves obtained have to pass through the point of ordinate $\partial C_{z\ell} / \partial \theta$ at zero frequency in the real part. However, in certain cases inaccuracies cause this point to be not properly located on the prolongation of the low frequency experimental points. The smoothings are then perturbed. In these particular cases, we impose the best point of departure possible when applying the program.

In using the parameters thus determined, we again employ $\partial C_{z\ell} / \partial \theta$ because the equations absolutely must include the static behavior. This shifts the harmonic responses slightly. (See

figure 15, for $M = 0.12$ in particular).

The retained parameters, which yielded the smoothings in figures 15, 16, and 17, are the following:

$$\begin{aligned}d &= 0.20 \\s &= 0.087 \\v &= 0.0775 - 0.08 M\end{aligned}$$

They will be used for the whole range of incidences lower than the angle of stall. Figure 16 shows the effect of incidence on the experimental points. This effect, which was neglected, becomes important only near the angle of stall, in the zone where the static curve has the rounded form that we did not take into account.

6.5 Model the Stalled Configuration

The principles that we have established are:

-- d is prolonged by continuity.

If the experimental points show clear asymptotic behaviors, deduce from them the functions $v(d\delta, \theta)$ and $s(d\delta, \theta)$.

If not, prolong the values obtained for the nonstalled state.

-- Search for r , then a , then e .

We will therefore use $s(d\delta, \theta) = 0.20$.

/21

As the experimental points poorly define the imaginary asymptotic direction, we keep $s(d\delta, \theta) = 0.087$.

We now have to choose $v(d\delta, \theta)$. Here, we proceeded in a slightly different manner than the established one, which makes the search

for the parameter a little more rigorous. However, it is certain that a choice based on an estimate of the asymptote of the real part would have given a good result.

σ is treated like r , a , and e by the program in Appendix B.

We have already stressed the fact that the order of finding the parameters can not be random (see page 15). Since the parameter r has a more important role than σ , it must be found first in order to stabilize the curves about reliable families. We then looked for $r(d, \theta)$ in order to fix the height of the peaks linked to the position of the asymptote and which a and e greatly depend on. Then we found $a(d, \theta)$ and then $e(d, \theta)$.

In fact, we interposed the choice of σ between r and a in the order r, a, e .

The results obtained are given in pages 42 to 48 [omitted in translator's copy of the original].

We expected an acceptable continuity as the Mach number changed, but we were forced to note a discontinuity between Mach 0.12 and 0.20. In contrast, the results at 0.20 and 0.30 are close enough that one can use the same formulation for both.

The difference at Mach 0.12 might arise from a Reynolds number effect. Be that as it may, such an effect interferes with the construction of the model. For the application, we will use one model for Mach numbers below 0.12, another for those above 0.20, and an interpolated model between the two for the intermediate Mach numbers.

The successive results obtained by the smoothing program are given on pages 42, 43, and 44.

Figure 17: We have in fact smoothed \sqrt{r} , which is an approximation of the position of the response's peak amplitude when a does not take on too high a value. We looked for it among a family of

hyperbolas, but parabolas would certainly have been simpler.

The advantage of hyperbolas comes from their coarser growth for very large values of ΔC_z , which might be encountered by the helicopter blades at certain operating points. In fact, the other coefficients were smoothed by parabolas and even a cubic curve, which cancelled out the advantage counted upon. For the application, one must therefore be careful not to go beyond the smoothed domain.

/27

$$\sqrt{r} = 0.1 + \alpha \Delta C_z + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha \Delta C_z - \beta}$$

with $\beta = -1$

$$\alpha = 1 \quad \text{for } M \leq 0.12$$

$$\alpha = 1.525 - 4.375 M \quad \text{for } 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\alpha = 0.65 \quad \text{for } 0.20 \leq M \leq 0.40$$

Figure 18: The smoothing of σ has not posed any problem either. A family of straight lines sufficed. These lines' imposed point of departure was the nonstalled value of σ , which has already been determined.

$$\sigma = 0.0775 - 0.08 M + \gamma \Delta C_z$$

with $\gamma = -0.19 \quad M \leq 0.12$

$$\gamma = 1.3875 M - 0.3565 \quad 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\gamma = -0.079 \quad 0.20 \leq M \leq 0.40$$

Examination of the tables clearly shows that the order of the choices of r , σ , and e cannot be random. In first step, r is easily smoothable whereas σ takes on erratic values. In the second step, meanwhile, it can be smoothed properly.

Figure 19: Very easy smoothing of a by parabolas:

$$a = a_0 + \delta \Delta C_z^2$$

The choice of an initial ordinate of around 0.20 is logical, but it turns out that a very small variation in this ordinate

strongly influences the large loops at the moment when the flow reattaches and the response of the second equation is dampened. Choosing 0.15, 0.20, or 0.25 does not appreciably change the function $a(\Delta C_z, \theta)$, but can lead to large loops that overlap each other. Experience shows that the dampening is in general less than the critical dampening, which here has the value of 0.20. This is the reason for the choice of 0.15 for a ($\Delta C_z = 0$). (The critical dampening equals $a_c = \sqrt{4r}$. It is such that any return to equilibrium occurs by oscillations for $a < a_c$ and without oscillations for $a \geq a_c$.)

The curves show the very clear difference in behavior at Mach 0.12.

We choose $a = 0.15 - \delta \Delta C_z^2$

with $\delta = 1.75$ for $M \leq 0.12$

$\delta = -16.25 M + 3.70$ for $0.12 \leq M \leq 0.20$

$\delta = 0.45$ for $0.20 \leq M \leq 0.40$

Figure 20: The values of e are very well aligned.

$e = \xi \Delta C_z^2$ *should be 2 (?)*

with $\xi = -2.7$ for $M \leq 0.12$

$\xi = 26.25 M - 5.85$ for $0.12 \leq M \leq 0.20$

$\xi = -0.6$ for $0.20 \leq M \leq 0.40$

It is remarkable that the value $e = 0$ is so well suited for the initial ordinate, although any value would have been acceptable.

The model is now completely defined. The smoothings obtained in the stalled part are given in figures 21 and 22. The set of harmonic responses is shown by figures 23 and 24. Note there the discontinuity induced by stalling. This discontinuity would have been replaced by a sudden and continuous variation if the bend in

the static curve had been taken into account. It is remarkable that the experimental points clearly show this continuous variation over the 2° preceding stalling (see figure 16, page 41 [of the original text]).

6.6 The Large Loops

/2

In the following pages, we have traced three series of large loops (figures 25, 26, and 27).

Mach 0.12	frequency: 4 Hz	figure
Mach 0.30	frequency: 4 Hz	figure
Mach 0.30	frequency: 8 Hz	figure

The variation in amplitude is $\pm 6^\circ$ about a mean incidence of between 0° and 20° . The loops about a 20° incidence go beyond the framework in which the model was made, but they do not lead to an absurd result.

The calculations were made both with the rough model and by taking the delay in stalling used by Beddoes into account. The differences between the two sets of results is rather small, but it is certainly in the direction of improvement. The delay $\Delta\tau$ of 5 in reduced time is rather small.

These results should be compared with wind tunnel tests. Such a comparison might lead to a modification in the parameters a and r for $\Delta C_z = 0$.

This comparison poses a few problems for us that are outside the actual subject of this report. It has therefore been put off to Appendix C.

7. Conclusions

In this article we have reported on a general method for modeling the response to small amplitude vibrations that is valid for the

whole domain in which a profile is used. The results obtained from an example show a behavior exhibiting a continuity of coefficients that validates the choice of equations used.

Previous work [1 and 2] has shown the possibility of using this set of equations for obtaining the behavior at high amplitudes so long as we restrict ourselves to relatively slow movements. Actually, these make up the realistic cases.

We therefore think that our model has entered the application phase.

Work should nevertheless continue by building a model of a profile (OA9) over the whole range of Mach numbers and angles of incidence encountered by a helicopter blade and for both lift and moment. Difficulties in dealing with the moment might appear. They would be due to a large dispersion of experimental points.

/30

Improvements that do not undermine the results obtained up to now are still possible.

Appendix A: Algorithm for Finding the Coefficients in the Nonstalled Zone

In the nonstalled zone, $C_q = C_{q_1}$; C_q is the solution of the equation:

$$\dot{C}_q + d C_q = d C_{q_0} + (d\lambda + \sigma) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta}$$

If $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta} e^{j\lambda z}$ and $C_q = C_{q_0} + \tilde{C}_q e^{j\lambda z}$

then
$$\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} = \frac{d \frac{\partial C_{q_0}}{\partial \theta} + j\lambda (d\lambda + \sigma) - \lambda^2 A}{j\lambda + d}$$

Dat's and Meurzec's algorithm [10] is used to optimize the experimental points by the ratio: $N(v)/D(v)$.

Let us note the experimental points

$$\left[\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right]_{\lambda_k, \theta_{0k}, d\lambda_k} = z_k = X_k + j Y_k$$

Our family of parameters will better represent the experimental points to the extent that one minimizes

$$\text{Error} = \sum_k P_k(\lambda_k) \left\{ \frac{N_k}{D_k} - z_k \right\}^2$$

where P_k is a positive weighting factor

and $\{z\}$ denotes the norm $\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

We will in fact minimize:

/58

$$\text{Error} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} \left\{ N_k - \sum_j D_k \right\}^2$$

If one takes $a_k = 1$ for a first iteration, and with D_k evaluated in the preceding iteration, for the following iterations, our minimization series will tend towards the sought-after minimum, if the algorithm is stable.

We will suppose $b = d\lambda + \sigma$ and continue on. The error becomes:

$$\text{Error} = \sum_k \frac{P_k(y_k)}{a_k} \left\{ \left(\lambda \frac{\partial G_k}{\partial \theta} - \lambda y_k^2 - x_k d + y_k y_k \right)^2 + \mu \left(b y_k - x_k y_k - d y_k \right)^2 \right\}$$

Error minimization is obtained by making $\partial(\text{error})/\partial \lambda$, $\partial(\text{error})/\partial b$, and $\partial(\text{error})/\partial \sigma$ all equal zero simultaneously. That leads to the following linear system:

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M \begin{pmatrix} d \\ b \\ \sigma \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V$$

where

$$M = \begin{pmatrix} \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right]^2 + \mu Y_k^2 & -\mu Y_k Y_k & -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] \\ -\mu Y_k Y_k & \mu Y_k^2 & 0 \\ -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] & 0 & Y_k^4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -Y_k Y_k \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k + \mu X_k \right] \\ \mu X_k Y_k^2 \\ Y_k Y_k^3 \end{pmatrix}$$

whose solution is reinjected into the denominator $a_k = \{D_k\}^2$ for a new iteration. The convergence is almost immediate.

/59

Such an algorithm is generalizable if the variables d, b, σ are sought for in the form:

$$d = d_i f_i(d, b, \theta)$$

$$b = b_i g_i(d, b, \theta)$$

$$\sigma = \sigma_i h_i(d, b, \theta)$$

with $f_i, g_i,$ and h_i being predefined functions (e.g. $d = d_1 d b + d_2$).

The preceding algorithm is applicable, and the system becomes:

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M' \begin{pmatrix} d_j \\ b_j \\ p_j \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V'$$

with

$$M' = \begin{pmatrix} \left[\left[\left(\frac{\partial G_0}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right]^2 + \mu Y_k^2 \right] f_i f_j & -\mu Y_k Y_k g_j f_i & -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial G_0}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] f_j f_i \\ -\mu Y_k Y_k f_j g_i & \mu Y_k^2 g_i g_j & 0 \\ -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial G_0}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] f_j b_i & 0 & Y_k^4 h_j h_i \end{pmatrix}$$

and

$$V' = \begin{pmatrix} -Y_k Y_k \left[\left(\frac{\partial G_0}{\partial \theta} \right)_k + \mu X_k \right] f_i \\ \mu X_k Y_k g_i \\ Y_k Y_k^3 h_i \end{pmatrix}$$

Application of this Algorithm to the Second Equation

The same reasoning leads us to the following system:

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M \begin{pmatrix} r \\ a \\ e \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V$$

with, $a_k = 1$ for the first iteration

$$a_k = (y^2 - r)^2 + \mu a^2 y^2 \quad a \text{ and } r \text{ being the values found in the preceding iteration.}$$

One makes $X'_k + j Y'_k = X_k + j Y_k - \frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}$

then

$$M = \begin{pmatrix} \left[X'_k + \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right]^2 + \mu Y_k'^2 & y_k y_k' \left[(\mu-1) X'_k - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu y_k y_k' \\ y_k y_k' \left[(\mu-1) X'_k - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] & y_k^2 (Y_k'^2 + \mu X_k'^2) & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu X_k' y_k'^2 \\ \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu y_k y_k' & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu X_k' y_k'^2 & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k^2 \mu y_k'^2 \end{pmatrix}$$

and

$$V = \begin{pmatrix} y_k^2 X_k' \left[X_k + \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] + \mu y_k^2 Y_k'^2 \\ (\mu-1) y_k^3 X_k' Y_k' \\ \frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \mu y_k^3 Y_k' \end{pmatrix}$$

This algorithm does not make it possible to take σ into account as we did in the example since the response $\tilde{C}_q / \tilde{\theta}$ is no longer in the form of a single ratio but is the sum of two ratios. If this sum is reduced to a single fraction, the unknown coefficients' products will become involved in a way that is untreatable.

Gross applications of this algorithm have always led to divergent calculations here.

Our problem is to smooth a series of experimental points $z_k = X_k + jY_k$ by a transfer function $(\tilde{C}_q/\tilde{\theta} \chi v)$, which depends on n parameters γ_j (in this case r, σ, a, e).

To do this, we define an error function:

$$Err(\gamma_i) = \sum_k P_k \left\{ \left[X_k - \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} (\gamma_k) \right) \right]^2 + \mu \left[Y_k - \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} (\gamma_k) \right) \right]^2 \right\}$$

P_k is a weighting factor that might be used and that depends on the reduced frequency, and μ another weighting factor for giving more importance to either the real or imaginary parts.

The method consisting of looking for the roots of the system

$$\frac{\partial Err(\gamma_i)}{\partial \gamma_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

leads to systems that are impossible to solve directly.

We therefore tried to find the minimum error by a gradient method built around formulas 22 in page 2.14 of [6].

1. Algorithm

1. Choose a point of departure P_i for $i = 1$.

We are acquainted with the systems under study well enough to know valid points of departure.

For a lift, we use:

$\lambda_1 = 0.04$
$\sigma_1 = 0.1$
$d_1 = 0.2$
$e_1 = 0$

2. Analytically calculate the gradient G_i of Err.

3. Calculate the search direction T_i , which is not the one with the largest slope ($-G_i$), but an improved direction that takes account of the curvature of the surface $z = \text{Err}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. This curvature is deduced from the previous steps:

$$T_i = -G_i + \frac{\|G_i\|^2}{\|G_{i-1}\|^2} T_{i-1}$$

If $i = 1$, one makes $T_i = -G_i$.

Lastly, for a better outcome, we reinitialize T_i at G_i every seven interactions.

4. Find Σ_m such that the error at the point $P_i + \Sigma T_i$, denoted $F(\Sigma)$, is at a minimum.

We therefore look for $\frac{dF(\Sigma)}{d\Sigma} = 0$, or

$$\sum_j (T_i)_j \left(\frac{\partial \text{Err}}{\partial \gamma_j} \right)_{P_i + \Sigma T_i} = 0$$

$((T_i)_j)$ represents the j th component of T_i .

4a. First approximation of Σ_m :

$$\Sigma_1 = \frac{\frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma_0) - \frac{dF}{d\Sigma}(0)}{\Sigma_0} \quad \begin{array}{l} \Sigma_0 \text{ small} \\ (\Sigma_0 = 10^{-7} \text{ used}) \end{array}$$

Choose the value Σ_2 such that Σ_2/Σ_0 is the greatest power of 2 less

than Σ_1/Σ_0 . This value will then be divided by 2 so as to have a greater degree of safety in the calculation (to avoid going too far beyond the sought-after minimum, into a region where Err might assume a complex behavior):

$$\Sigma_2 = \frac{\Sigma_0}{2} \cdot 2^{\text{INT}(\log_2 \Sigma/\Sigma_0)}$$

INT = integral function

4b. Find a limiting interval $[\Sigma_3, \Sigma_4]$ surrounding the solution: /63

Starting with the property $\frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma=0) < 0$:

-- if $\frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma=\Sigma_2) > 0$, divide Σ_2 by 2
until $df/d\Sigma < 0$;

-- if $\frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma=\Sigma_2) > 0$, double Σ_1
until $dF/d\Sigma > 0$.

In both cases, save the last two values of Σ_2 encountered as end points to the desired interval $[\Sigma_3, \Sigma_4]$.

The second type of loop (double Σ_1 ...) threatens to never end if the minimum Σ_m is located in an asymptotic direction. In the case of our model, certain optimizations do correspond to an infinite value for Σ_m . There is nothing that can be done about it.

4c. Reduce the interval $[\Sigma_3, \Sigma_4]$ to $[\Sigma_5, \Sigma_6]$, by using the sign of $dF/d\Sigma$ to choose a smaller interval to surround Σ_m .

4d. Make a linear interpolation in $[\Sigma_5, \Sigma_6]$ to find Σ_7 , our best approximation of Σ_m .

$$\xi_7 = \xi_5 - \frac{\xi_6 - \xi_5}{\frac{dF}{d\xi}(\xi_6) - \frac{dF}{d\xi}(\xi_5)} \frac{dF}{d\xi}(\xi_5)$$

5. Calculate the new point $P_{i+1} = P_i + \xi_7 T_i$ and return to 2, except if the distance $P_i P_{i+1}$ is small enough, in which case the convergence is considered to be finished ($P_i P_{i+1} \leq 10^{-5}$).

2. Results

/6.

Our test for terminating convergence is very severe ($P_i P_{i+1} \leq 10^{-5}$), but there is no risk of divergence near the minimum. Therefore, the more difficult the test we employ, the more we are sure of being close to the desired solution. Especially since our calculations are made on a machine in the office and are free ...

Average number of iterations made:

	<u>small error</u>	<u>large error</u>
4 degrees of freedom	$\approx 20,25$	up to 80
3 " " "	$\approx 10,12$	up to 25
2 " " "	$\approx 8,10$	up to 15
1 " " "	2	2

These results are only indications based on the cases taken up.

3. Possible Improvements

The formulas used in 3 significantly improve the outcome of the system. Other formulas, proposing better search directions, can be used (see in particular [7]).

Note that on page 2.15 in [6] are also found formulas 23, which have been used too, but which have given poor results. (There is probably an error involved.)

The tracings of the calculated large loops (figures 25, 26, 27) reveal a disagreement with the measured large loops (figures 30, 31, 32, dotted lines). A similar result was obtained by Miss Falchero [9].

1. The Problem of Quality in Wind Tunnel Tests

The main cause of disagreement seems to come from the fact that the large amplitude tests and the small amplitude tests, which come from two different series, were made with two different mockups of the OA9 profile.

The first series [5] concerned the measurement of the profile's response to various harmonic motions of large, but also small, amplitude (at 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz). The mockup was then destroyed in order to recover the pressure sensors. Since the modeling process requires many more points of frequency, a second series [4] took place, which led to the model in chapter 6.

Naturally, a certain dispersion appeared between the two series each time the same quantities were measured:

-- Figure 28: The static curves are a little different, with stalling appearing a little earlier in the second series and a lower stalled C_z . A third static curve, obtained at Modane, is also represented. It gives still another result, with a particularly high angle of stall.

-- The small amplitude vibration measurements common to both series (20, 30 and 40 Hz) also show variations. One can see in particular, thanks to the tables in figure 20, that the maximum of the real part, which was located at between 15 and 20 Hz during the second series, was around 30 Hz in the first series, which corresponds to slightly higher values of r .

In a general manner, the wind tunnel tests tend to be dispersed at the moment of stalling and in the stalled region. Any little thing is enough to change, for example, the angle of stall. This little thing can be an irregularity in the profile or a three-dimensional effect. It is possible that small vibrations are more reliable measurements than static curves, but this is not obvious.

All this is rather annoying since the differences noted are significant in the model. The use of the first series' static curves coupled with the coefficients deduced from the second series greatly improves our loops. (See figures 30, 31, and 32.)

The model as we have defined it correctly schematizes the behavior of a certain mockup in its wind tunnel. The defects in the profile of the wind tunnel and of the processing of measurements (customarily called the wind tunnel's "age") are blindly taken into account in our equations, which account for the profile's large amplitude behavior in the same measurement conditions. These conditions are chosen to be as close as possible to reality. However, wind tunnels are hard to master. Obviously, these problems are those of any model based on wind tunnel tests.

2. Application of the Model to the Large Loops in the First CEAT [Center for Thermal and Aerodynamic Studies] Series

For this application, it is necessary to take account of certain results obtained in the first series, at least of the static curves that the model is supposed in particular to predict.

We therefore tried to find formulas for the static curves that are similar to those already used:

$$C_z^{\theta} = C_{z_0} + p_0 \theta$$

$$\theta \leq \theta_1$$

$$C_z^{\theta} = C_{z_0} + (p_0 - p_1) \theta_1 + p_1 \theta + \kappa [e^{\nu(\theta - \theta_1)} - 1]$$

$$\theta \geq \theta_1$$

with

$$C_{z_0} = 0.05$$

$$p_0 = 0.102 / \sqrt{1 - \text{db}^2}$$

$$p_1 = 0$$

$$\kappa = 4/3 M + 0.7$$

$$\nu = -0.5$$

$$\theta_1 = 16^\circ - 10 M$$

It is this single correction that yielded figures 30, 31, and 32. The results are now acceptable and certainly would have been even a little better if all the tests had been done in succession, especially at very high angles of incidence. /6

We observed the effect of the corrections more completely on a loop straddling the angle of stall. Refer to figure 33.

The conditions are: Incidence: $11^\circ \pm 6$
Mach number: 0.30
Frequency: 4 Hz

First loop: Rough application of the model obtained from the second series. The result was not good.

Second loop: Introduction of Beddoes' delay, which prolonged the right part of the loop, but did not make an overall improvement.

Third loop: Use of C_z static from the first series. The loop was now a good one.

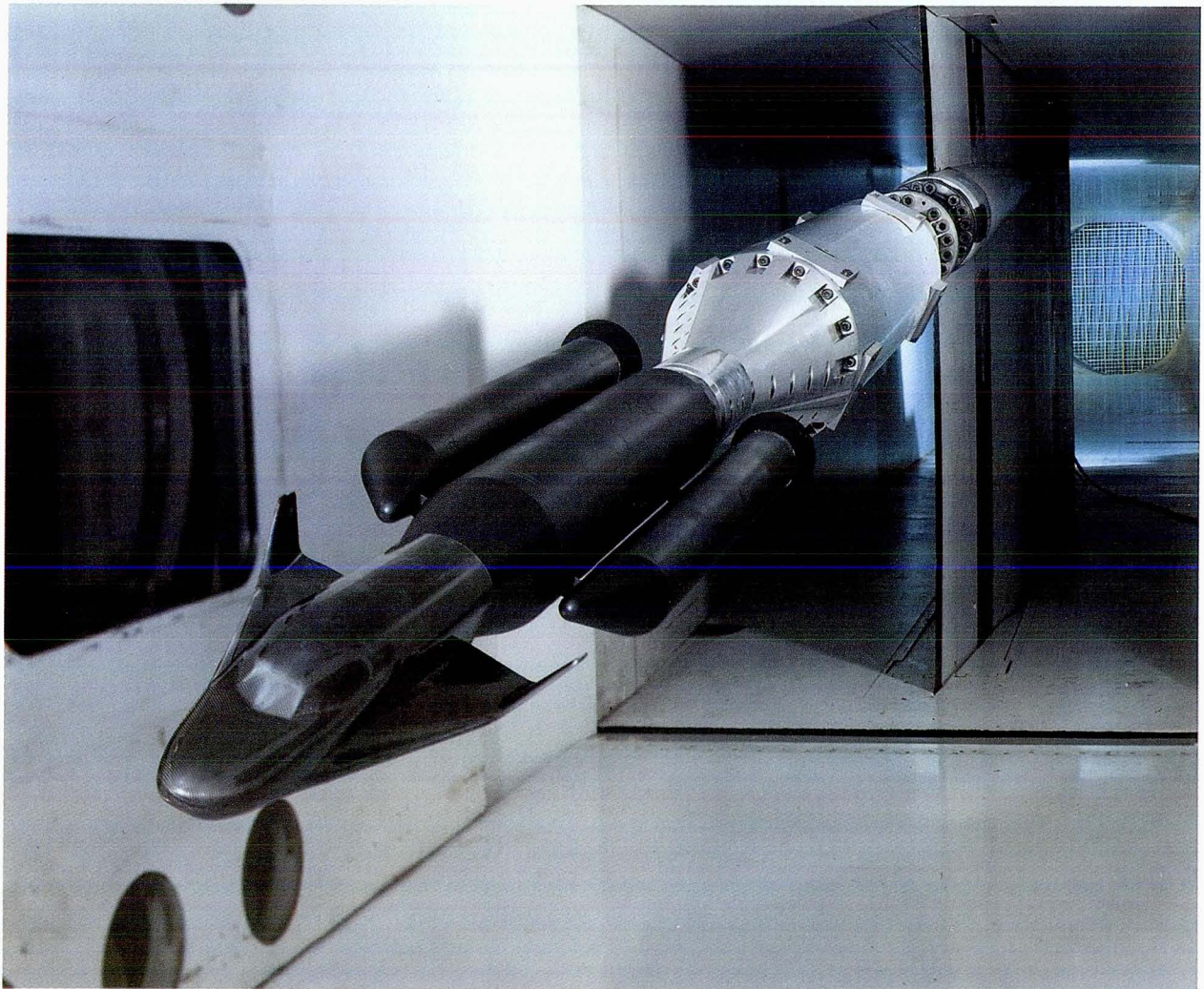
Fourth loop: Modification of r to take account of the observation gleaned from the tables in figure 29:

DIRECTION DES STRUCTURES

Rapport Technique n° 12/1841 RY 080R

Juillet 1981

Algorithme de lissages successifs pour la recherche
du modèle semi-empirique de prévision des forces aé-
rodynamiques instationnaires développé à l'ONERA



OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES

29, avenue de la Division Leclerc, 92320 CHATILLON
Direction Scientifique de la Résistance des Structures

DP/MLD

1700/OR

Rapport Technique n° 12/1841 RY 080R
Juillet 1981

Algorithme de lissages successifs pour la recherche
du modèle semi-empirique de prévision des forces aé-
rodynamiques instationnaires développé à l'ONERA

H. Loiseau
Chef de la Division
"Essais Spéciaux"

Auteur :
D. Petot


Vu et approuvé,

Le Directeur Scientifique
de la Résistance des Structures



G. Coupry

FICHE D'IDENTIFICATION

<p>ORGANISME ÉMETTEUR :</p>  <p>OFFICE NATIONAL D'ÉTUDES ET DE RECHERCHES AÉROSPATIALES</p> <p>29, Avenue de la Division Leclerc, 92320 Châtillon</p>	CLASSIFICATION		
	Secret militaire	Secret industriel	
	Titre : NC	Non Confidentiel Industrie	
	Fiche : NC		
	Document : NC		
	Numéro de la fiche programme	Service de l'Etat chargé de l'exécution du contrat	
	R. 212 A	STPA	
		Numéro du contrat	
		Rapport de fin d'étude : Convention n° 80.95.005 Lot 3 - Poste 3.1	
Direction : Résistance des Structures			
<p>TITRE :</p> <p>Algorithme de lissages successifs pour la recherche du modèle semi-empirique de prévision des forces aérodynamiques instationnaires développé à l'ONERA</p>			
<p>AUTEUR (S) : (personne physique) D. Petot</p>			
DATE :	NUMÉRO D'ORIGINE DU DOCUMENT	NOMBRE	
		Pages	Figures
Juillet 1981	R.T. n° 12/1841 RY 080R	73	dont 33 Fig.
			Réf. bibliographiques
			10
<p>RÉSUMÉ D'AUTEUR :</p> <p>Ce rapport est relatif aux travaux effectués dans le cadre de la fiche R 212A du programme 1980 : méthodes d'aérodynamique instationnaire adoptées aux études d'aéroélasticité des hélicoptères. Il concerne la mise au point et le développement d'un modèle semi-empirique des forces aérodynamiques instationnaires agissant sur profil oscillant à grande incidence. L'algorithme de lissages successifs développé dans ce rapport conduit d'une façon très satisfaisante aux coefficients du modèle.</p> <p align="center">Ce fait confirme sa valeur et le rend maintenant opérationnel.</p>			
<p>NOTIONS D'INDEXAGE :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Aéroélasticité des hélicoptères - - Forces aérodynamiques instationnaires en régime décroché - 			

41.200091

TABLE DES MATIERES

	<u>n° pages</u>
. Titre et auteurs	1
. Fiche d'identification	3
1. <u>INTRODUCTION</u>	7
2. <u>RESUME DES TRAVAUX PRECEDENTS</u>	7
3. <u>DIFFICULTES DANS LA RECHERCHE DE MODELE</u>	10
3.1 Choix du modèle	10
3.2 Equations et définition des variables	11
4. <u>COMPORTEMENT DU MODELE</u>	12 bis
4.1 Rôle des différents paramètres sur les réponses à faible amplitude	13
5. <u>CONDUITE DE LA MODELISATION</u>	16
5.1 Modélisation du comportement statique	16
5.2 Modélisation en configuration non décrochée	17
5.3 Modélisation en configuration décrochée	18
5.4 Remarques importantes concernant le choix des fonctions	20
5.5 Résumé de la méthode	21
6. <u>EXEMPLE DE MODELISATION</u>	22
6.1 Définition des variables	22
6.2 Points de mesure	22
6.3 Modélisation statique	23
6.4 Modélisation en configuration non décrochée	24
6.5 Modélisation en configuration décrochée	24
6.6 Les grandes boucles	28

7. <u>CONCLUSIONS</u>	28
REFERENCES	30
<u>ANNEXE A</u> : Algorithme de recherche des coefficients dans le domaine non décroché	56
<u>ANNEXE B</u> : Optimisation des paramètres par la minimisation d'une fonction de plusieurs variables	60
<u>ANNEXE C</u> : Comparaison du modèle avec l'expérience pour l'exemple qui a servi d'illustration	64

1. INTRODUCTION

Les conditions d'écoulement sur une pale d'hélicoptère nécessitent l'utilisation d'un modèle de prévision des forces aérodynamiques s'appliquant aux régimes décollés.

Des conditions pratiques (les problèmes concernent des mouvements à petite amplitude, ou des mouvements à grande amplitude, mais de faible fréquence), et théoriques (linéarisation) ont amené à la formulation de modèles sous forme de jeux d'équations différentielles reliant les paramètres de position du profil aux coefficients d'efforts aérodynamiques.

La première étape de l'étude a consisté à montrer la capacité d'un tel modèle à reproduire les effets des vibrations à petite et à grande amplitude [1 et 2].

Dans un deuxième temps, il fallait trouver un procédé général pour l'obtention du modèle sur toute la gamme d'utilisation du profil, et ce, à partir d'un jeu de mesures expérimentales. C'est l'objet de ce rapport.

Tout au long de ces deux premières étapes, le jeu d'équation différentielle a évolué vers une plus grande aptitude à décrire les phénomènes rencontrés. Il n'est pas complètement figé, et des modifications sont encore envisageables qui ne remettraient pas en cause les travaux précédents.

La troisième étape consistera à modéliser complètement un profil et à appliquer cette aérodynamique à des cas de vol réel d'hélicoptère.

2. RESUME DES TRAVAUX PRECEDENTS [1 et 2]

La forme la plus générale sous laquelle peut se mettre le modèle, compte tenu des hypothèses retenues, est la suivante :

$$\phi_q + \sum_{k=1}^j A_{q\phi_k} \phi_k + \sum_{k=1}^j A_{q\dot{\phi}_k} \dot{\phi}_k + \dots$$

$$= \sigma^2 C_q(\alpha, \sigma) - A_{q\dot{\theta}} \dot{\theta} - A_{q\alpha} \dot{\alpha} - A_{q\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - A_{q\ddot{\theta}} \ddot{\theta} - \dots$$

pour $q = 1, 3$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 correspondent aux coefficients de portance, moment, traînée

α = incidence instantanée au quart avant par rapport à la vitesse instantanée \vec{V}

θ = incidence par rapport à la vitesse moyenne \bar{V} du profil

$$\tau = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{V}|} = \text{paramètre de vitesse sans dimension}$$

Les A_{xy} sont des coefficients.

Modèle A

Ce modèle comporte un grand nombre de coefficients inaccessibles à la théorie pour longtemps, mais dont on peut estimer la valeur à partir d'une série d'expériences. Les vibrations sinusoïdales à petite amplitude s'imposent a priori, mais d'autres formes de mouvement peuvent aussi conduire à des résultats intéressants.

Pour les applications, on peut simplifier ce modèle en tenant compte de certaines réalités physiques et des besoins des utilisateurs.

Un modèle en particulier a été défini à partir des coefficients de Küßner. Le système a été mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} bF \\ \dot{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_f & 0 \\ 0 & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bF \\ M \end{pmatrix} = -\pi\rho V^2 b^2 \ell \left\{ \begin{pmatrix} d_f & 0 \\ 0 & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_f & A_f \\ r_m & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta + h \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_f & A_f \\ \gamma_m & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} + \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \right\}$$

F et M désignent la portance et le mouvement

h est le déplacement sans dimension le long de la normale

θ est la rotation du profil par rapport au quart avant

Modèle B

L'application au domaine de vol de l'hélicoptère a montré la nécessité d'introduire des pôles complexes pour tenir compte de certains résultats expérimentaux en zone décrochée. Les équations ont été mises sous une forme légèrement différente afin de tenir compte des différentes conditions à vérifier. La forme s'est un peu éloignée de la formulation générale mais les principes de base sont toujours respectés.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_{q_1} = d C_{q_2} + (d_1 + \tau) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + 2\alpha \delta \dot{C}_{q_2} + \delta^2 (1 + \alpha^2) C_{q_2} = -\delta^2 (1 + \alpha^2) [\Delta C_q + \epsilon \Delta \dot{C}_q] \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Modèle C

Ce modèle a été appliqué à la portance et au moment d'un profil de la famille OA. La valeur des différents coefficients a été ajustée à partir d'essais de vibration à petite amplitude en soufflerie.

Le modèle trouvé a été utilisé pour retrouver des boucles de portance et de moment de grande amplitude et a donné lieu à de très bonnes comparaisons avec l'expérience.

Dans la suite de ce rapport, nous utiliseront une forme un peu différente de ces équations (voir page 11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_q + d C_{q_1} = d C_{q_2} + (d_1 + \tau) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2} = -[r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Modèle D

Mis à part les changements de variables, la différence tient en ce que a et r peuvent prendre des valeurs positives inaccessibles aux groupements $2\alpha\delta$ et $\delta^2(1+\alpha^2)$, ce qui permet un champ d'application plus libre ; (mais a et r doivent quand même rester positifs pour des questions de stabilité de la réponse).

La deuxième équation qui prend en compte les effets de décrochage intervient dès que ΔC_q est non nul, c'est-à-dire dès l'incidence de décrochage statique. L'expérience montre que le décrochage n'intervient effectivement qu'un peu plus tard. Pour tenir compte de ce fait, on peut introduire une fonction $H(\theta, \dot{\theta})$, nulle tant que le décrochage ne s'est pas vraiment effectué, unité ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_{q_1} + d C_{q_1} = d C_{q_e} + (d_1 + \tau) \dot{\theta} + d \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + n C_{q_2} = -[r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Modèle D'

Une telle correction est parfaitement dans l'esprit de la linéarisation qui est à la base du modèle : au delà de l'angle de décrochage statique, si le décrochage n'a pas vraiment eu lieu, il ne faut pas utiliser le modèle linéarisé autour d'un écoulement décollé.

3. DIFFICULTES DANS LA RECHERCHE DE MODELE

La recherche des paramètres dans ce genre de modèle se fait au moyen des courbes de réponse à un mouvement vibratoire de petite amplitude en fonction de la fréquence. La réponse du modèle est connue analytiquement. Les paramètres doivent être choisis de façon que cette réponse soit aussi proche que possible de la réponse mesurée. Il y a lissage de la réponse harmonique en fonction de la fréquence.

Or, pour obtenir une équation valable dans tout le domaine de fonctionnement de la pale d'hélicoptère, les jeux de paramètres ainsi trouvés doivent eux-mêmes se lisser en fonction de l'incidence, puis en fonction du Mach.

Ce triple lissage complexe (la réponse harmonique est complexe : elle a une amplitude et une phase par rapport au mouvement original qui l'a créée) est difficile.

3.1 Choix du modèle

On peut trouver différentes formes de modèles qui restituent très bien la réponse harmonique d'un coefficient aérodynamique dans une certaine condition de vol. Nous avons retenu la forme des modèles C et D (voir chapitre précédent) pour les raisons suivantes :

- les lissages en fonction de la fréquence se font aisément, parce que les formules employées correspondent au comportement général des coefficients aérodynamiques. Cela tient au fait que ces formules proviennent

d'équations différentielles dont on a montré qu'elles étaient une approximation de tout système vibrant, linéaire à faible amplitude. Les comportements en fréquence sont bien présents, en amplitude et en phase,

- il n'y a pas trop de paramètres, et moyennant certaines simplifications que l'expérience nous permet, il est possible de séparer l'influence de plusieurs d'entre eux. C'est une conséquence du point précédent : les réponses possédant le comportement expérimental, celui-ci est couvert par une famille de peu de paramètres,
- le peu de paramètres que nous utilisons fait que chacun de ces derniers a un rôle bien distinct de celui des autres. Quand un lissage en fonction de la fréquence à Mach et incidence fixés est effectué, celui-ci restitue la valeur de chaque paramètre correspondant au rôle qu'il joue.

L'évolution naturelle étant continue, les paramètres se retrouvent eux-mêmes avec des valeurs continues, donc aisément lissables ; (attention quand même : le décrochage pour l'incidence, et l'influence du nombre de Reynolds pour le Mach peuvent créer des discontinuités).

3.2 Equations et définition des variables

Le point désigne la dérivation par rapport au temps réduit . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_1 + d C_1 = d C_{1e} + (d\lambda + \tau) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_2 + a \dot{C}_2 + r C_2 = - [r \Delta C_1 + e \Delta \dot{C}_1] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_1 = C_{1e} + C_2 \end{array} \right.$$

En temps réel, le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' + d' C_1 = d' C_{1e} + (d'\lambda' + \tau') \theta' + \lambda' \theta'' \\ C_2'' + a' C_2' + r' C_2 = - [r' \Delta C_1 + e' \Delta C_1'] H(\theta, \theta') \\ C_1 = C_{1e} + C_2 \end{array} \right.$$

avec	$d' = dV/b$ $\lambda' = \lambda b/V$	$a' = aV/b$ $r' = rV^2/b^2$ $e' = eV/b$
------	---	---

db = nombre de Mach

V = vitesse du vent

ω = pulsation réelle

γ = pulsation réduite ; $\gamma = \omega b / V$

t = temps réel

τ = temps réduit ; $\tau = Vt / b$

$b = \frac{1}{2}$ corde du profil

θ = variable de position du profil

θ_d : apparition du décrochage

θ_o : position moyenne pendant une vibration

$\tilde{\theta}$: amplitude de la vibration

H = fonction de $\theta, \dot{\theta}$ prenant les valeurs 0 ou 1

$H = 0$ caractérise l'écoulement dynamiquement accroché

$H = 1$ " " " décroché

Ces états de l'écoulement ne correspondent aux zones statiques que pour $\dot{\theta} = 0$.

C_q = coefficient aérodynamique (voir figure 1)

$C_{q_s}(db, \theta)$: valeur statique de ce coefficient

$C_{q_p}(db, \theta)$: valeur statique de ce coefficient pour un écoulement non décollé, mais que l'on doit définir sur tout le domaine modélisé

(même dans les zones décrochées).

$$\Delta C_q(\omega, \theta) = C_{q_1} - C_{q_2} \quad \text{caractérise le décrochage}$$

C_{q_1} provient de l'aérodynamique non décrochée

C_{q_2} est la correction due au décrochage

C_{q_0} = position moyenne pendant une vibration

\tilde{C}_q = amplitude de la vibration

4. COMPORTEMENT DU MODELE

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_{q_1} + d C_{q_1} = d C_{q_0} + (d_1 + \sigma) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta} \\ \ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2} = -[r \Delta C_q + e \Delta \dot{C}_q] H(\theta, \dot{\theta}) \\ C_q = C_{q_1} + C_{q_2} \end{array} \right.$$

Conditions respectées :

- à fréquence nulle, on retrouve $C_q = C_{q_0} - \Delta C_q = C_q$ statique
- tant que l'on ne décroche pas, le deuxième membre de la deuxième équation est nul et sa solution est $C_{q_2} = 0$; seule la première équation joue (à condition que les conditions initiales pour la deuxième équation soient bien $C_{q_2}(0) = 0$ et $\dot{C}_{q_2}(0) = 0$, ce qui est le cas si l'écoulement est resté accroché suffisamment longtemps pour que sa réponse ait eu le temps de s'amortir).

La fonction $H(\theta, \dot{\theta})$ est la seule quantité qui ne peut pas se choisir par des essais de faible amplitude. Elle permet de retarder le décrochage quelque temps après le passage de l'angle statique de décrochage, effet qui s'observe sur toutes les grandes boucles expérimentales.

Si on suppose une amplitude infiniment faible, l'écoulement est soit toujours décollé, soit toujours accroché, et les équations se comportent comme si cette fonction était absente.

4.1 Rôle des différents paramètres sur les réponses faible amplitude

Il sera illustré par un exemple type qui se rapporte à un coefficient de portance pour une vibration autour du quart avant.

Les valeurs des différents coefficients sont :

$$\begin{aligned} C_{q_0} &= 0,103 \theta & \lambda &= 0.2 & \mu &= 0.15 \\ & & A &= 0.087 & a &= 1 \\ & & & & e &= -1 \end{aligned}$$

Pour le cas non décroché : $\nu = 0.068$ et $\frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} = 0$

Pour le cas décroché : $\nu = 0$ et $\frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} = 0.180$

(la diminution de ν dans la zone décrochée est en général rencontrée pour ce type de coefficient).

Les réponses harmoniques sont tracées dans les deux configurations aux figures 2 et 6.

a. configuration non décrochée

A l'entrée $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta} e^{j\gamma Z}$ on fait correspondre la réponse $C_q = C_{q_0} + \tilde{C}_q e^{j\gamma Z}$
On a les relations :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right) &= \frac{\lambda^2 \frac{\partial C_{q_0}}{\partial \theta} + \gamma^2 \nu}{\lambda^2 + \gamma^2} \\ \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right) &= \frac{\lambda \gamma (1 + \nu - \frac{\partial C_{q_0}}{\partial \theta}) + \lambda \gamma^3}{\lambda^2 + \gamma^2} \end{aligned} \right.$$

L'examen des formules ci-dessus donne directement l'interprétation de σ et λ :

σ représente l'asymptote horizontale de la partie réelle de la réponse $\frac{\tilde{C}_q}{\theta}$ (voir courbe figure 4),

λ est la pente de l'asymptote de la partie imaginaire de (cette asymptote passe par l'origine). Voir courbe figure 5.

d modifie la façon dont sont atteintes les asymptotes

- . d faible : elles sont atteintes rapidement
- . d fort : elles sont atteintes lentement

(voir courbe figure 3)

La formule $\operatorname{Re}(\tilde{C}_q/\theta) = (d^2 \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \nu^2 \sigma) / (d^2 + \nu^2)$ montre que la partie réelle est toute entière comprise entre sa valeur initiale $\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta}$ et sa valeur asymptotique σ . De plus, la valeur moyenne $\frac{1}{2} (\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \sigma)$ est atteinte à la fréquence réduite $\nu = d$.

Dans le domaine temporel, d caractérise la vitesse à laquelle le régime permanent s'établit. La réponse à un échelon d'incidence est d'autant plus rapide que d est grand.

Nos trois paramètres d , λ , σ sont ainsi largement découplés. Comme de plus dans le régime non décollé qui nous intéresse ici, les résultats expérimentaux sont de très bonne qualité, leur recherche ne pose aucun problème et conduit à des lissages en fonction du Mach, excellents.

b. configuration décrochée

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, la réponse s'écrit:

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\theta} \right) &= \frac{d \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} + \nu^2 \sigma}{d^2 + \nu^2} + \frac{(\nu^2 - \lambda) \lambda + \nu^2 \sigma}{(\nu^2 - \lambda)^2 + \lambda^2 \nu^2} \frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} \\ \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\theta} \right) &= \frac{\lambda \nu (d \lambda + \nu - \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta}) + \lambda \nu^3}{d^2 + \nu^2} + \frac{\nu \lambda \lambda + (\nu^2 - \lambda) \nu \sigma}{(\nu^2 - \lambda)^2 + \lambda^2 \nu^2} \frac{\partial \Delta C_q}{\partial \theta} \end{aligned} \right.$$

Les paramètres se partagent en deux groupes : (d, s, σ) issus de la première équation et (r, a, e) issus de la seconde.

On peut traiter ces deux groupes séparément parce que l'expérience montre que la réponse de la deuxième équation $\tilde{C}_2/\tilde{\theta}$ est prépondérante devant celle de la première $\tilde{C}_1/\tilde{\theta}$, dans les basses et moyennes fréquences réduites. Le contraire se produit à fréquence élevée où $\tilde{C}_2/\tilde{\theta} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ tandis que $\tilde{C}_1/\tilde{\theta} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} r + j\nu a$

On en déduit pour le premier groupe (d, s, σ) que :

- . d a un rôle négligeable (voir figure 7)
- . σ et s ont toujours leur sens physique asymptotique.

On remarque tout de même que l'asymptote sur la partie imaginaire est atteinte à fréquence vraiment élevée -figures 8 et 9-.

Rôle de r et de a . . .

Le premier membre $\ddot{C}_{q_2} + a \dot{C}_{q_2} + r C_{q_2}$ possède une réponse classique en fonction de la fréquence, dont l'amplitude passe par un maximum pour $\nu = \sqrt{r - a^2/2}$ (lorsque toutefois cette expression est définie, c'est-à-dire si $a < \sqrt{2r}$).

"En gros", r fixe la position du pic d'amplitude et a sa hauteur et sa largeur. En fait, le deuxième membre de la deuxième équation contient ν également et vient modifier ce schéma simple. Mais les courbes, figures 10 et 11, tracées dans un cas d'application réaliste, montrent que les rôles de r et de a ont bien leur allure classique.

Rôle de e (figure 12) .

Le deuxième membre de la deuxième équation est la somme de deux excitations : $-r \frac{dAG}{d\theta} \tilde{\theta}$ et $-e \frac{dAG}{d\theta} \ddot{\theta}$, expressions obtenues après avoir linéarisé.

On voit que e fait globalement croître la réponse ; mais il faut dire qu'une diminution de a a le même effet.

e diffère de a par le fait que

- . a peut faire augmenter le pic d'amplitude, mais en le rendant plus étroit. e ne modifie pas sa largeur, mais cet effet n'est certainement pas suffisant pour classer l'influence des deux variables à partir d'un jeu de points expérimentaux.

. surtout, la valeur de e détermine la phase du maximum d'amplitude par rapport au mouvement du profil. En effet, les deux excitations $-c \frac{d\Delta G}{d\theta} \tilde{\theta}$ et $-jVe \frac{d\Delta G}{d\theta} \tilde{\theta}$ sont en quadrature. L'excitation globale admet donc une certaine phase par rapport à θ , phase qui se retrouve dans toute la réponse de la deuxième équation :

si e décroît : le déphasage tend vers $-\frac{\pi}{2}$
 pour $e = 0$: pas de déphasage
 pour $Ve = c$: déphasage de $\frac{\pi}{4}$
 si e croît : le déphasage tend vers $\frac{\pi}{2}$

Les modélisations effectuées jusqu'ici montrent que les points expérimentaux permettent de bien séparer les effets de a et de e .

5. CONDUITE DE LA MODELISATION

Quatre étapes bien distinctes sont à considérer :

- . modélisation du comportement statique de C_q
- . modélisation en zone non décrochée : recherche de d, λ, σ
- . modélisation en zone décrochée : recherche de $d, \lambda, \tau, \alpha, \beta, c$
- . vérification sur grandes boucles.

5.1 Modélisation du comportement statique

Il s'agit de trouver des formules analytiques qui restituent C_{qs} sur toute la gamme de Mach et d'incidence. Il faut en particulier trouver une loi donnant l'angle de décrochage en fonction du Mach.

Cette phase est plus difficile qu'elle ne le paraît. Pour éviter des problèmes inutiles dans la poursuite de la modélisation, il est nécessaire de la conduire avec soin. La réponse harmonique du modèle va dépendre fortement de $\partial C_{qs} / \partial \theta$, et il va donc falloir approcher ce terme au mieux. Celà ne pose pas de problème aux faibles incidences, ni aux très fortes incidences. Il y a malheureusement dès l'apparition du décrochage, une zone critique où C_{qs} varie fortement, et donc $\partial C_{qs} / \partial \theta$ également, et où de plus, l'expérience donne des valeurs entachées de grosses incertitudes.

L'imprécision sur $\partial C_q / \partial \theta$ dans cette zone sera en général inévitable, particulièrement si l'on s'occupe d'un moment. Il faudra quand même essayer de le représenter au mieux.

La mesure de C_q doit donc être conduite avec beaucoup de soin, pour un nombre élevé d'incidences, garantissant la continuité de l'évolution. Une solution consiste à utiliser une rampe très lente d'incidence, qui donne une mesure continue.

La complexité de l'aérodynamique décrochée, fait que l'utilisation d'une telle rampe va donner un résultat différent selon le sens dans lequel elle est conduite. Sous la forme proposée, le modèle ne peut pas rendre compte de ce comportement. L'utilisateur devra utiliser une courbe statique moyenne qui lui semblera satisfaisante.

5.2 Modélisation en configuration non décrochée

Il s'agit de rechercher la valeur des coefficients d, λ, σ de

$$\dot{C}_q + d C_q = d C_{q_0} + (d\lambda + \sigma) \dot{\theta} + \lambda \ddot{\theta}$$

dans tout le domaine non décroché.

Cette recherche est faite à partir de la réponse harmonique de C_q à une vibration sinusoïdale de petite amplitude.

Pour les théories aérodynamiques linéarisées classiques, cette réponse est indépendante de l'incidence moyenne du profil. L'expérience confirme à peu près ce fait, ce qui nous conduit à utiliser des coefficients d, λ, σ ne dépendant que du Mach. Cette simplification ne rend d'ailleurs pas toujours l'équation linéaire, puisqu'on est parfois amené à utiliser une fonction $C_{q_0}(\theta)$ non affine (pour le C_m).

Nous avons vu au chapitre précédent les rôles des différents paramètres. La qualité des résultats expérimentaux enregistrés dans cette zone, la signification physique très précise de chaque paramètre, font que la recherche de d, λ, σ peut facilement se conduire manuellement. Nous utilisons toutefois l'algorithme décrit à l'annexe A qui automatise cette recherche.

5.3 Modélisation en configuration décrochée

— $H(\theta, \dot{\theta})$ est une fonction que l'on ne sait pas choisir pour l'instant. Un retard dépendant de l'importance de $\dot{\theta}$ au passage de l'incidence θ_d de décrochage devrait donner de bons résultats. En fait, nous utilisons le retard universel défini par Beddoes [8] pour des oscillations harmoniques et qui vaut $\Delta t \approx 5b/V_\infty$ ou simplement $\Delta \tau = 5$ en temps réduit (exactement 4,88 avec un écart moyen de 0,98 sur 142 exemples choisis par l'auteur avec différents profils, fréquences, amplitudes de vibrations, nombre de Mach).

Ce retard est celui de l'apparition d'un tourbillon au bord d'attaque qui fait chuter le moment. La portance ne chute pas tout de suite, mais avec un retard moyen de 10,8 en temps réduit, toujours selon Beddoes, à cause du temps de transit de ce tourbillon, mais cet effet est censé être pris en compte par les équations.

Le choix de la fonction $H(\theta, \dot{\theta})$ est indépendant du reste de la modélisation.

— Il nous faut également déterminer les valeurs des six coefficients $d, \lambda, \sigma, \tau, \alpha, \epsilon$ des deux équations.

Six paramètres, cela fait beaucoup, mais en se rapportant au chapitre précédent, plusieurs simplifications sont possibles. Nous avons conclu que la deuxième équation avait un rôle prépondérant, sauf aux fréquences élevées où $\tilde{C}_q/\tilde{\sigma}$ admettait l'asymptote $(\sigma + j)\lambda$. Le rôle de d en particulier était négligeable.

De plus, il faut considérer la première équation comme donnant le C_q en incidence non décrochée, et ce, même aux incidences supérieures à l'angle de décrochage. Il existe des artifices qui retardent le décollement : aspiration de la couche limite où fort mouvement de tangage, ou numériquement, résolution des équations aérodynamiques simplifiées. On constate alors une réponse qui est dans la continuité de celle obtenue aux plus basses incidences. La loi $C_z = 2\pi\theta$ (θ en Radians) en particulier semble toujours valable.

Nous tâcherons donc de conserver à la première équation son comportement non décroché, en ne réservant que quelques corrections sur ces paramètres.

Nous nous proposerons donc simplement de :

- . extrapoler λ dans la zone décrochée. Les points expérimentaux ne peuvent pas permettre de distinguer un comportement particulier de λ . Comme on choisit $\lambda(\theta) = \text{const}$, l'extrapolation est toute faite.
- . corriger légèrement τ et λ dans la zone décollée pour tenir compte de tendance à haute fréquence que montrerait l'expérience.

Si la correction n'apparaît pas sur les points expérimentaux (comportement asymptotique atteint à fréquence trop élevée, tout particulièrement pour λ), on conserve alors évidemment les valeurs non décrochées.

Recherche des coefficients α, β, ϵ ,
.....

Cherchant à approcher au mieux les points expérimentaux, on définit une fonction erreur égale à la somme des carrés des erreurs en chaque point de mesure, en affectant éventuellement des poids pour chaque fréquence, ou pour les parties réelles par rapport aux parties imaginaires.

Le programme de l'Annexe B cherche les valeurs α, β, ϵ qui minimisent cette erreur, pour chaque valeur du Mach et de l'incidence (optimisation par la méthode des gradients défléchis.

On pourrait maintenant lisser les α, β, ϵ obtenus par des fonctions du Mach et de l'incidence. Mais les lissages que l'on peut faire sont difficiles et conduisent à de mauvais résultats du fait de la dispersion des valeurs α, β, ϵ optimisées.

Il faut distinguer l'action des trois variables, en se reportant au chapitre précédent.

Le pic de réponse de \tilde{C}_q/θ est le caractère de la courbe le plus sûr, mesuré à l'expérience. Il évolue peu d'une incidence à l'autre, d'un Mach à l'autre. Nous avons dit que sa position était définie principalement par α , également par β qui joue lui surtout sur sa hauteur.

Dans un premier temps, nous nous contenterons donc de lisser les valeurs de α , par une expression $\alpha(\omega, \theta)$. La nouvelle valeur peut être considérée comme une meilleure approximation de la valeur de α que celle obtenue par le lissage brut. C'est elle que l'on utilisera désormais.

Toujours avec le programme de l'Annexe B, on recherche ensuite le couple optimum (a, e) , α étant fixé à la valeur que l'on vient de déterminer. Les différentes valeurs de a sont lissées par une expression $a(\Delta b, \theta)$. Encore une fois, cette nouvelle valeur de a peut être considérée comme une meilleure approximation de a que celles obtenues par lissage brut, et elle sera désormais utilisée.

Il ne reste plus que e , dont on recherche également les valeurs optimales lissées en fonction de Δb et de θ .

La modélisation est ainsi achevée.

5.4 Remarques importantes concernant le choix des lissages

— Il nous faut trouver des expressions en fonction de l'incidence, valables dans les deux domaines décroché et accroché. Il faut que ces expressions ne varient pas dans la zone accrochée, et varient peu aux très fortes incidences où les configurations d'écoulement se ressemblent. En fait, il apparaît plus simple d'utiliser comme variable $\Delta C_g(\theta)$ au lieu de θ . Et comme certaines variables C_g ont un comportement trop violent, nous utiliserons plutôt ΔC_g qui semble la meilleure estimation du décollement.

Ainsi, à $\Delta C_g = 0$ correspond l'ordonnée à l'origine des courbes $\Delta, \alpha, \nu, \alpha, a, e$ qui sera la valeur de la variable correspondant à l'écoulement accroché.

— Les fonctions α et a ne doivent jamais prendre de valeurs négatives. Cela signifierait que le profil à une certaine incidence fixe serait soumis à des forces divergentes vers l'infini. Cela ne serait acceptable que pour le cas du cylindre où une force oscillante se développe spontanément pour certaines vitesses de vent, mais il faudrait alors introduire des termes non linéaires pour empêcher cette force d'aller à l'infini par l'établissement de cycles limites (tout ceci est développé par Széchényi [3]).

— Nous ne pouvons pas isoler le comportement de la première équation dans la zone décollée, et il a fallu supposer qu'il ne changeait pas de façon importante. De même, le comportement de la deuxième équation n'est pas accessible dans la zone non décollée.

Or, quand l'écoulement raccroche, l'excitation de la deuxième équation s'annule, mais non C_{g_2} : la deuxième équation continue de répondre tant que C_{g_2} ne s'est pas amorti, ce qui se fait d'une façon qui dépend de α et de a .

Il nous faut donc définir α et a dans la zone accrochée également, mais les vibrations à petite amplitude ne peuvent alors nous renseigner à leur sujet.

Des expériences spéciales sont nécessaires, par exemple des échelons d'incidence de forte amplitude entre la zone décrochée et la zone accrochée. La façon dont le régime permanent s'établit dépend de α et de a .

Jusqu'à présent, nous avons utilisé les grandes oscillations d'incidence à cheval sur l'incidence de décrochage. La façon dont se fait le recollement pendant les boucles dépend également de α et de a , mais d'une façon plus complexe.

Un peu de tâtonnement ainsi bien sûr que la condition de continuité de α et de a avec les valeurs du début de décollement (mais ce critère n'est pas très précis), mais a conduit à utiliser jusqu'ici

$$\alpha \approx 0.0100$$

$$a \text{ compris entre } 0.15 \text{ et } 0.20$$

5.5 Résumé de la méthode

- . Modélisation des courbes statiques.
- . Modélisation pour les incidences non décrochées (programme de l'Annexe A)
- . Modélisation pour les incidences décrochées
 - . recherche des expressions $s(\alpha, \theta)$, $\tau(\alpha, \theta)$
 - . optimisation des triplets (α, a, e) d'où on déduit $r(\alpha, \theta)$
 - . optimisation des doublets (a, e) d'où on déduit $a(\alpha, \theta)$
 - . optimisation de e d'où l'on déduit $e(\alpha, \theta)$

Les optimisations sont conduites pour chaque Mach et chaque incidence par le programme de l'Annexe B.

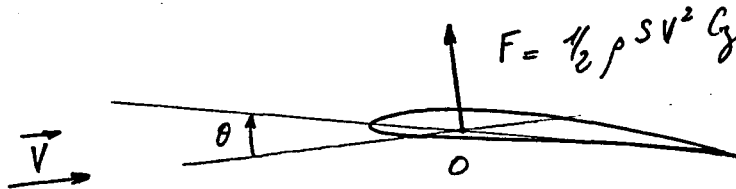
- . Vérification sur des grandes boucles empiétant sur la zone décrochée des choix des valeurs $r(\alpha, \Delta C_2=0)$ et $a(\alpha, \Delta C_3=0)$. Correction éventuelle de ces valeurs, avec la contrainte de rester compatible avec les résultats expérimentaux obtenus à petite amplitude.

Ces grandes boucles permettent aussi de juger de la qualité générale de la modélisation et de la nécessité d'introduire la fonction $H(\theta, \dot{\theta})$.

6. EXEMPLE DE MODELISATION

Exemple relatif à la portance du profil OA 209 pour des mouvements de tangage autour du quart avant.

6.1 Définition des variables



θ = incidence du profil en degrés

C_L = coefficient de portance

ρ_0, ρ, μ, c = variables introduites pour modéliser les couches statiques

Les autres variables sont définies comme au chapitre 3 page 11

6.2 Points de mesure

Ils ont été obtenus par le CEAT [4].

Le domaine d'application du modèle va jusqu'à 20° d'incidence pour des Mach compris entre 0. et 0.30, mais son extension jusqu'à Mach 0.4 devrait être possible.

Des essais à petite amplitude de vibration ont été faits à Mach 0.12, 0.20, 0.30, pour les incidences moyennes suivantes : $0^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 14^\circ, 15^\circ, 16^\circ, 17^\circ$ et 18° et même 20° pour Mach 0.12.

Les fréquences de vibration ont été :

pour Mach = 0.12 1.5 - 3 - 5.5 - 10 - 15 - 20 - 30 - 40 Hz

" Mach = 0.20 3 - 5,5 - 10 - 15 - 20 - 30 - 40 Hz

" Mach = 0.30 4 - 5,5 - 8 - 10 - 15 - 20 - 30 - 40 Hz

soit des fréquences réduites comprises entre 0.045 et 1.23 (M = 0.12)

0.055 et 0.74 (M = 0.20)

0.050 et 0.49 (M = 0.30)

40 Hz représente une limite physique du montage que l'on ne peut dépasser sans détériorer la qualité des mesures.

Ce jeu de fréquences a permis de bien définir toutes les réponses harmoniques nécessaires à la recherche des paramètres.

6.3 Modélisation statique

Nous avons recherché les courbes statiques sous la forme :

$$C_{zs} = C_{z_0} + p_0 \theta \quad \text{pour } \theta \leq \theta_d \text{ décrochage}$$

$$C_{zs} = C_{z_0} + (p_0 - p_1) \theta_d + p_1 \theta + c [e^{\mu(\theta - \theta_d)} - 1] \quad \text{pour } \theta \geq \theta_d$$

ce qui s'écrit encore :

$$C_{zs} = C_{z_0} + p_0 \theta + [(p_1 - p_0)(\theta - \theta_d) + c (e^{\mu(\theta - \theta_d)} - 1)] H(\theta - \theta_d)$$

Cette famille de courbe s'interprète ainsi (voir figure 13) :

- aux basses incidences, C_{zs} suit une relation affine de pente p_0
- aux très fortes incidences, il tend vers une asymptote de pente p_1 , (et qui passe par le point d'abscisse θ_d et d'ordonnée $C_{z_0} + p_0 \theta_d - c$)
- enfin, dans la zone décrochée, C_{zs} tend d'une façon monotone vers son asymptote, d'autant plus vite que μ a une valeur plus négative.

Les valeurs utilisées qui restituent les courbes expérimentales sont :

$$C_{z_0} = 0.03$$

$$p_0 = 0.102 / \sqrt{1 - db^2}$$

$$p_1 = 0$$

$$c = -0.55 M + 0.65$$

$$\mu = -0.3 M - 0.43$$

$$\theta_d = 1.27 / p_0 = 12.45 \sqrt{1 - db^2}$$

Voir les tracés à la figure 14.

On observe sur les points expérimentaux un arrondi au moment où le décrochage se produit tandis que les lissages montrent un décrochage brutal. Nous n'avons pas pris en compte cet arrondi qui amènerait une formulation lourde pour un gain négligeable.

6.4 Modélisation en configuration non décrochée

(incidence de décrochage donnée par la formule $\theta_d = 12.45 \sqrt{1 - db^2}$)

Le programme de l'Annexe 1 permet de trouver le jeu de paramètres (d, a, ν) réalisant la meilleure approximation aux moindres carrés à chaque Mach.

Un problème se pose parfois : les courbes optima obtenues passent obligatoirement par le point d'ordonnée $\partial C_e / \partial \theta$ à la fréquence nulle sur la partie réelle. Mais des incertitudes font dans certains cas que ce point ne se situe pas bien sur le prolongement des points expérimentaux à basse fréquence. Les lissages sont alors perturbés. Dans ces cas particuliers, nous appliquons le programme en imposant le meilleur point de départ possible. ↵

↳ Dans l'utilisation des paramètres ainsi déterminés, nous utilisons à nouveau $\partial C_e / \partial \theta$, car les équations doivent absolument posséder le comportement statique. Cela décale légèrement les réponses harmoniques (voir figure 15 pour $M = 0.12$ particulièrement).

Les paramètres retenus qui ont donné les lissages des figures 15, 16 et 17 sont les suivants :

$$d = 0.20$$

$$a = 0.087$$

$$\nu = 0.0775 - 0.08 M$$

Ils seront utilisés sur toute la gamme d'incidence inférieures à l'angle de décrochage. La figure 16 montre l'effet de l'incidence sur les points expérimentaux. Celui-ci, négligé, ne devient important qu'au voisinage de l'angle de décrochage, dans la zone où la courbe statique forme l'arrondi dont nous n'avons pas tenu compte.

6.5 Modélisation en configuration décrochée

Les principes que nous avons déjà définis sont :

. d est prolongé par continuité

Si les points expérimentaux montrent des comportements asymptotiques clairs, en déduire les fonctions $\nu(db, \theta)$ et $a(db, \theta)$.

Sinon, prolonger les valeurs obtenues en non décroché.

. recherche de ν , puis de a , puis de e

Nous utiliserons donc $\lambda(\Delta b, \theta) = 0.20$.

Comme les points expérimentaux définissent mal la direction asymptotique imaginaire, on garde $\lambda(\Delta b, \theta) = 0.087$.

Il nous faut maintenant choisir $\tau(\Delta b, \theta)$. Là, nous avons procédé d'une façon un peu différente, de celle établie qui donne un peu plus de rigueur à la recherche du paramètre. Mais il est certain qu'un choix fait à partir d'une estimation de l'asymptote de la partie réelle aurait donné un bon résultat.

τ est traité comme r , a et e , avec le programme de l'Annexe B.

Nous avons souligné déjà le fait que l'ordre de la recherche des paramètres ne devait pas être quelconque (voir page 19). Le paramètre r ayant un rôle plus important que τ , il faudra le rechercher d'abord, pour stabiliser les courbes autour de familles sûres. Nous avons ensuite recherché $\tau(\Delta b, \theta)$ pour fixer la hauteur des pics liée à la position de l'asymptote et dont dépend beaucoup a et e . Puis nous avons recherché $a(\Delta b, \theta)$ puis $e(\Delta b, \theta)$.

En fait, nous avons donc intercalé le choix de τ entre r et a dans l'ordre r, τ, a, e .

Les résultats obtenus sont donnés dans les pages 42 à 48.

Nous nous attendions à une continuité acceptable en Mach, mais nous avons été contraints de constater une discontinuité entre Mach 0.12 et Mach 0.20. Par contre, les résultats à 0.20 et 0.30 sont suffisamment proches pour qu'on puisse utiliser la même formulation pour les deux.

La différence à Mach = 0.12 provient peut-être d'un effet du nombre de Reynolds. Toujours est-il qu'un tel effet est gênant pour la définition d'un modèle. Pour l'application, nous utiliserons une modélisation pour les Mach inférieurs à 0.12, une autre pour ceux supérieurs à 0.20 et une modélisation interpolée entre les deux précédentes pour les Mach intermédiaires.

Les résultats successifs obtenus par le programme de lissage sont donnés aux pages 42, 43 et 44.

Figure 17 : nous avons lissé en fait \sqrt{r} qui est une approximation de la position du pic d'amplitude de la réponse, quand a ne prend pas de trop fortes valeurs. Nous l'avons recherché parmi une famille d'hyperboles, mais des paraboles auraient certainement été plus simples.

L'avantage des hyperboles tenait en leur accroissement plus brut pour les très grandes valeurs de ΔC_z qui risquent de se rencontrer en certains points de fonctionnement des pales d'hélicoptère. En fait, les autres coefficients ont été lissés par des paraboles et même une cubique, ce qui annule l'avantage escompté. Pour l'application, il faudra donc faire attention de ne pas aller au delà du domaine lissé.

$$\sqrt{\lambda} = 0.1 + \alpha \Delta C_z + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha \Delta C_z - \beta}$$

avec $\beta = -1$

$$\alpha = 1 \quad \text{pour } M \leq 0.12$$

$$\alpha = 1.525 - 4.375 M \quad \text{pour } 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\alpha = 0.65 \quad \text{pour } 0.20 \leq M \leq 0.40$$

Figure 18 : Le lissage de σ n'a pas posé de problèmes non plus. Une famille de droites a suffi. Le point de départ de ces droites était imposé à la valeur de σ non décrochée, valeur déjà déterminée

$$\sigma = 0.0775 - 0.08 M + \gamma \Delta C_z$$

avec $\gamma = -0.19 \quad M \leq 0.12$

$$\gamma = 1.3875 M - 0.3565 \quad 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\gamma = -0.079 \quad 0.20 \leq M \leq 0.40$$

L'examen des tableaux montre bien que l'ordre des choix de λ , σ , a et e ne pouvait être quelconque. Dès la première étape, λ se lisse bien mais σ prend des valeurs erratiques, alors qu'à la deuxième étape, il se lisse très correctement.

Figure 19 : Lissage de a très aisé par des paraboles $a = a_0 + \delta \Delta C_z^2$

Le choix de l'ordonnée à l'origine vers 0.20 est logique, mais il s'avère qu'une très faible variation de cette ordonnée à l'origine influe fortement sur les grandes boucles, au moment où l'écoulement raccroche et que la réponse de la deuxième équation s'amortit. Choisir 0.15, 0.20, ou 0.25 change insensiblement la fonction $a(\Delta C_z, \theta)$ mais peut conduire à des grandes boucles doubles les unes des autres. L'expérience montre que l'amortissement

est en général inférieur à l'amortissement critique qui vaut ici 0.20, d'où le choix de 0.15 pour a ($\Delta C_3 = 0$)

(l'amortissement critique vaut $a_c = \sqrt{4r}$. Il est tel que tout retour à l'équilibre se fait par oscillations pour $a < a_c$ et sans oscillations pour $a \geq a_c$).

Les courbes montrent la différence très nette de comportement à Mach = 0.12.

$$\text{On retient} \quad a = 0.15 - \delta \Delta C_3^2$$

$$\text{avec} \quad \delta = 1.75 \quad \text{pour } M \leq 0.12$$

$$\delta = -16.25 M + 3.70 \quad \text{pour } 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\delta = 0.45 \quad \text{pour } 0.20 \leq M \leq 0.40$$

Figure 20 : Les valeurs de e sont très bien alignées

$$e = \xi \Delta C_3^3$$

$$\text{avec} \quad \xi = -2.7 \quad \text{pour } M \leq 0.12$$

$$\xi = 26.25 M - 5.85 \quad \text{pour } 0.12 \leq M \leq 0.20$$

$$\xi = -0.6 \quad \text{pour } 0.20 \leq M \leq 0.40$$

Il est remarquable que la valeur $e = 0$ convienne si bien pour l'ordonnée à l'origine, alors que n'importe quelle valeur aurait été acceptée.

Le modèle est maintenant complètement défini. Les lissages obtenus dans la partie décrochée sont donnés aux figures 21 et 22. L'ensemble des réponses harmoniques est montré par les figures 23 et 24. On y remarque la discontinuité apportée par le décrochage. Cette discontinuité aurait été remplacée par une variation brusque et continue, si on avait tenu compte de l'arrondi des courbes statiques. Il est remarquable que les points expérimentaux montrent clairement cette variation continue étalée sur les 2° précédant le décrochage (voir figure 16, page 4/).

6.6 Les grandes boucles

Nous avons tracé aux pages suivantes, trois séries de grandes boucles (figures 25.26.27).

Mach	0.12	;	fréquence	4 Hz	;	fig.
Mach	0.30	;	"	4 Hz	;	fig.
Mach	0.30	;	"	8 Hz	;	fig.

L'amplitude de vibration est de $\pm 6^\circ$ autour d'une incidence moyenne comprise entre 0° et 20° . Les boucles autour de 20° d'incidence sortent du cadre dans lequel la modélisation a été faite, mais elles ne conduisent pas à un résultat absurde.

Les calculs ont été effectués avec le modèle brut, et en tenant compte du retard au décrochage utilisé par Beddoes. La différence entre les deux jeux de résultat est assez faible, mais elle est certainement dans le sens d'une amélioration. Le retard Δt de 5 en temps réduit est assez faible.

Ces résultats devraient être comparés à des essais en soufflerie. Cette comparaison aurait éventuellement conduit à une modification des paramètres a et α pour $\Delta C_g = 0$.

Cette comparaison nous a posé quelques problèmes qui ne sont pas l'objet de ce rapport proprement dit. Elle a donc été reportée dans l'Annexe C page 64.

7. CONCLUSIONS

Nous avons exposé dans ce rapport une méthode générale utilisable pour la recherche d'un modèle du comportement à petite amplitude de vibration valable sur tout le domaine d'utilisation d'un profil. Les résultats obtenus sur un exemple montrent un comportement en continuité des coefficients tel qu'il valide le choix des équations utilisées.

Les travaux précédents [1 et 2] montrent la possibilité pour ce jeu d'équations de retrouver le comportement à grande amplitude, si on se restreint aux mouvements relativement lents, qui forment d'ailleurs les cas d'application réalistes.

Nous pensons donc que notre modèle est rentré dans une phase d'utilisation.

Les travaux devront néanmoins se poursuivre par la modélisation d'un profil (OA9) sur la gamme complète de Mach et d'incidence rencontrée sur une pale d'hélicoptère, en portance et en moment. Des difficultés peuvent apparaître sur le moment, qui seraient dues à la grande dispersion des points expérimentaux.

Des améliorations sont toujours possibles, qui ne remettraient pas en cause les résultats jusqu'ici obtenus.

R E F E R E N C E S

- [1] R. Dat, Ct. Tran, D. Pétot
Modèle phénoménologique de décrochage dynamique sur profil de pale d'hélicoptère.
AAAF - Lille - novembre 1979.
- [2] Ct. Tran - D. Pétot
Semi-empirical model for the dynamic stall of airfoils in view of the application to the calculation of responses of a helicopter blade in forward flight
6ème European Motorcraft and powered lift Aircraft forum. Bristol Septembre 1980.
- [3] E. Széchényi
Modèle mathématique du mouvement vibratoire engendré par un échappement tourbillonnaire
"La Recherche Aérospatiale" n° 1975-5
- [4] J. Coulomb
Profil OA2.09. Essais instationnaires sur oscillation harmonique d'incidence.
Procès-verbal 104/SC - CEAT_Toulouse
- [5] J. Coulomb
Mesures instationnaires de pressions sur le profil OA2 en oscillations harmoniques de tangage
Procès-verbal 58/SC - CEAT-Toulouse
- [6] J. Couot
Informatique numérique. Recherche d'optimum.
Cours de l'ENSAé - 1973.
- [7] D. Kraft et G. Kreisselmeier
Verläch von verfahren zur beschränkten Optimierung von funktionen mehrerer Variabler
DFVLR - Mitt.79-21

- [8] TS Beddoes - Westland
A synthesis of unsteady aerodynamic effects including stall hysteresis
1st european Motorcraft and powered Lift Aircraft Forum
Southampton - Septembre 1975.
- [9] D. Falchero
Modèle phénoménologique de décrochage dynamique du profil OA9
Rapport H/DE-ER 371-07 - juillet 1980.
- [10] R. Dat - JL Meurzec
Exploitation par lissage mathématique des mesures d'admittance d'un système linéaire.
La Recherche Aérospatiale. 1972-4

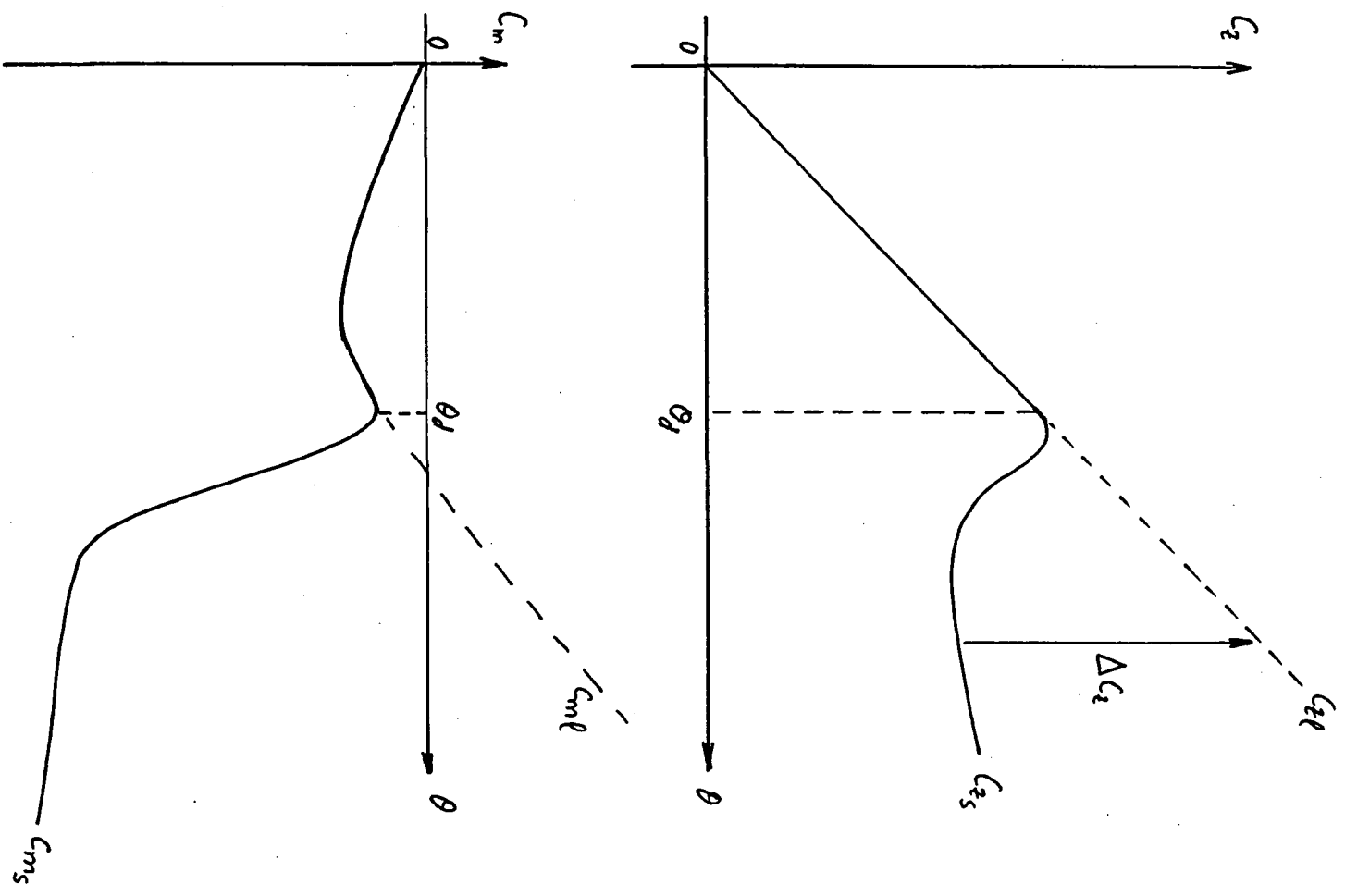


Fig 1 - Definition des variables - Exemples d'une portance et d'un moment

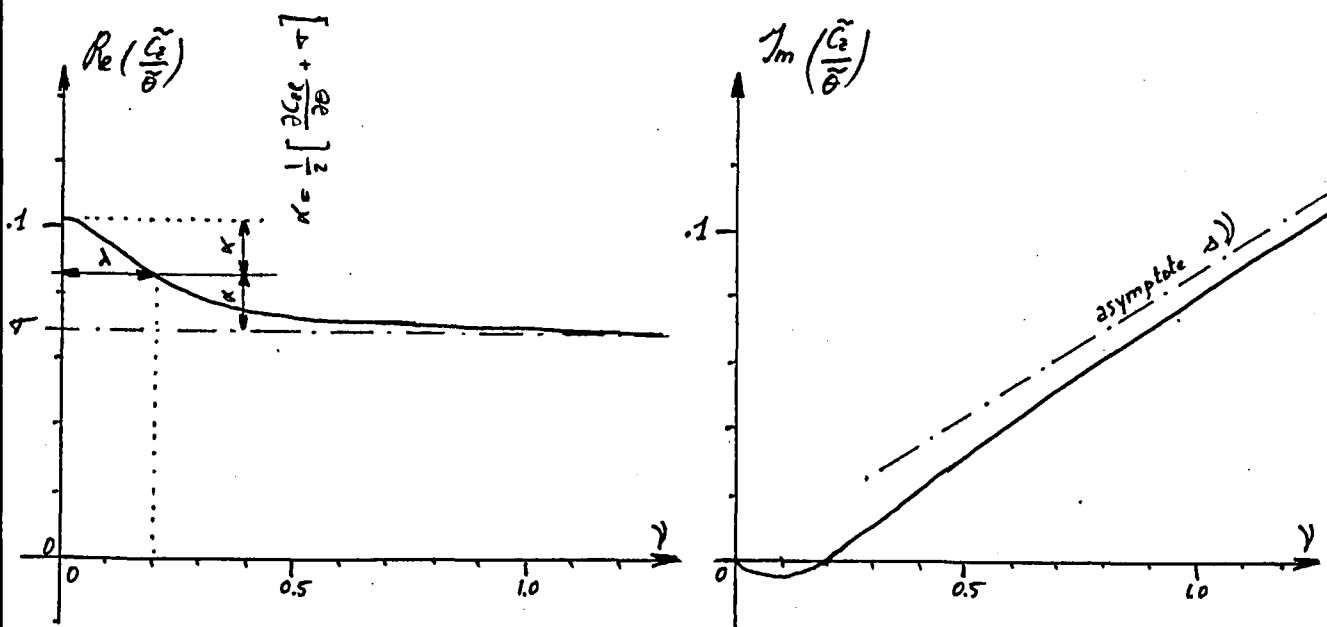


Fig 2 .

Comportement général du coefficient de portance en fonction de la fréquence réduite pour une vibration autour du quart avant à incidence nulle

$$d = 0.2 \quad \sigma = 0.068 \quad A = 0.087$$

$$\frac{\partial C_{L\tilde{e}}}{\partial \theta} = 0.103$$

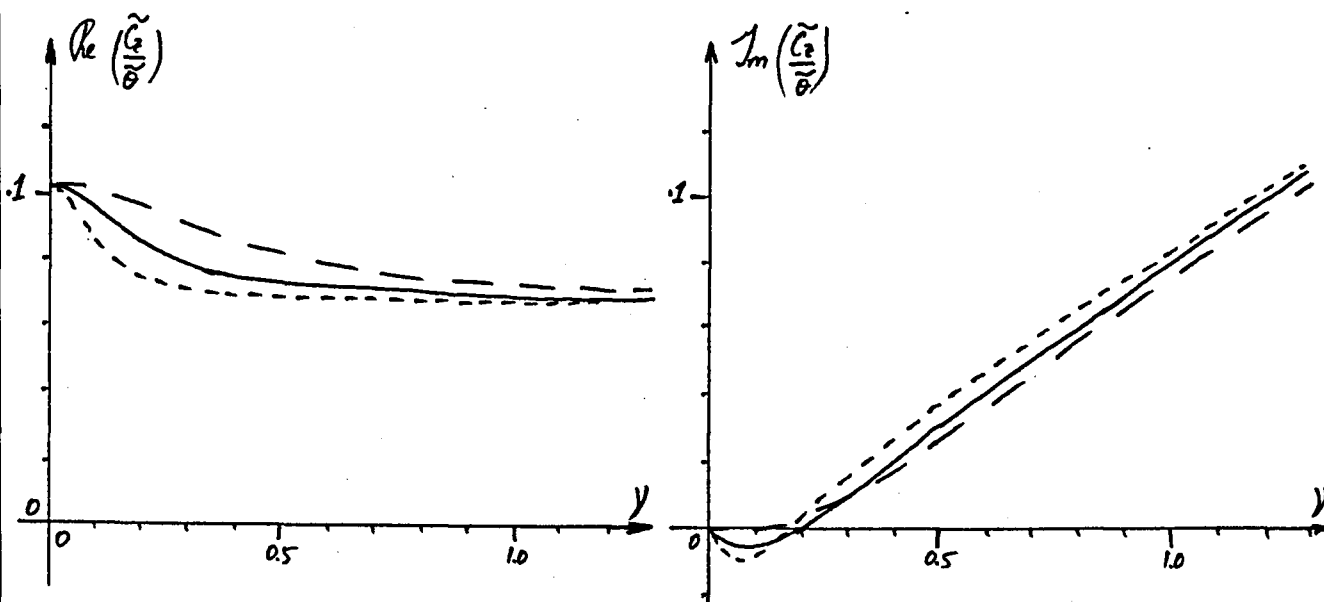


Fig 3-

Influence du paramètre d

- d = 0.1
- d = 0.2
- - - - - d = 0.4

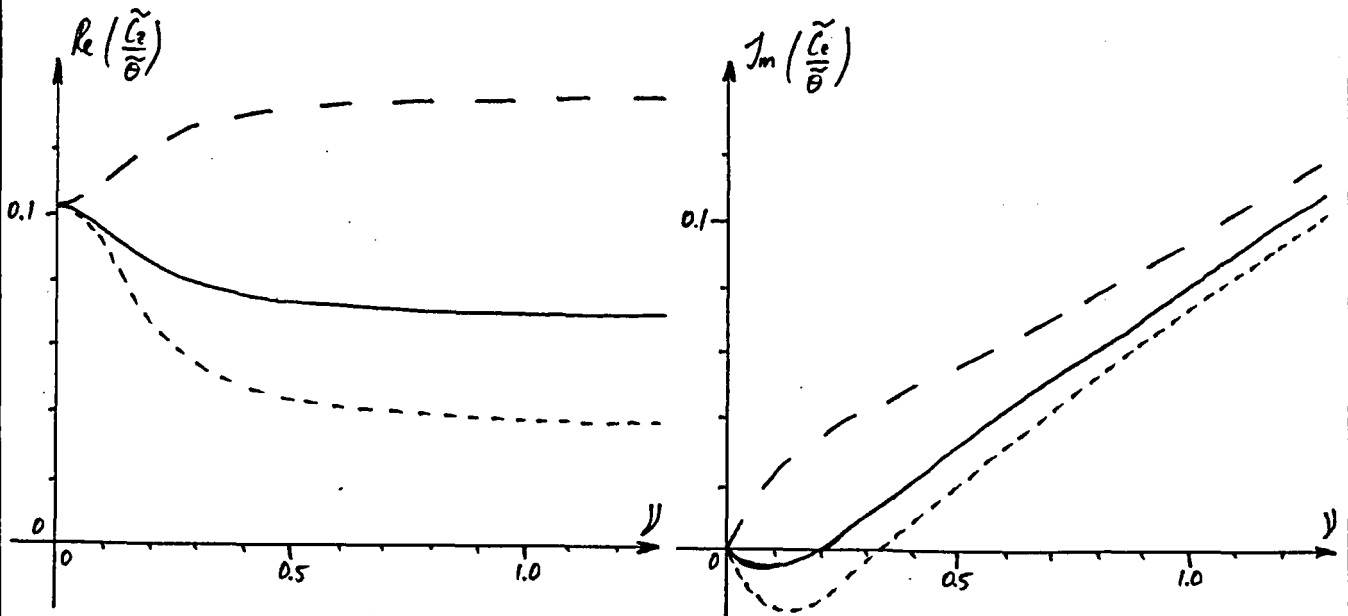


Fig 4 - Influence du paramètre σ

- - - - $\sigma = 0.034$
 ——— $\sigma = 0.068$
 - · - · $\sigma = 0.136$

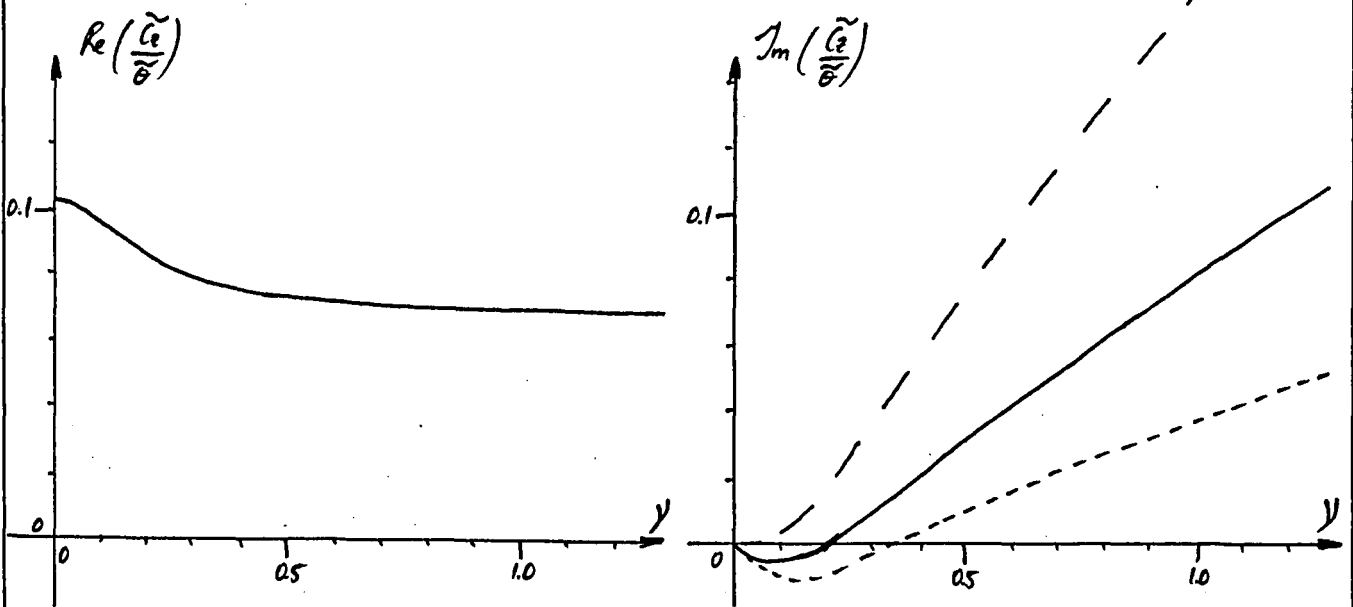


Fig 5 - Influence du paramètre λ

(il n'y a aucune influence sur la partie réelle)

- - - - $\lambda = 0.0435$
 ——— $\lambda = 0.087$
 - · - · $\lambda = 0.174$

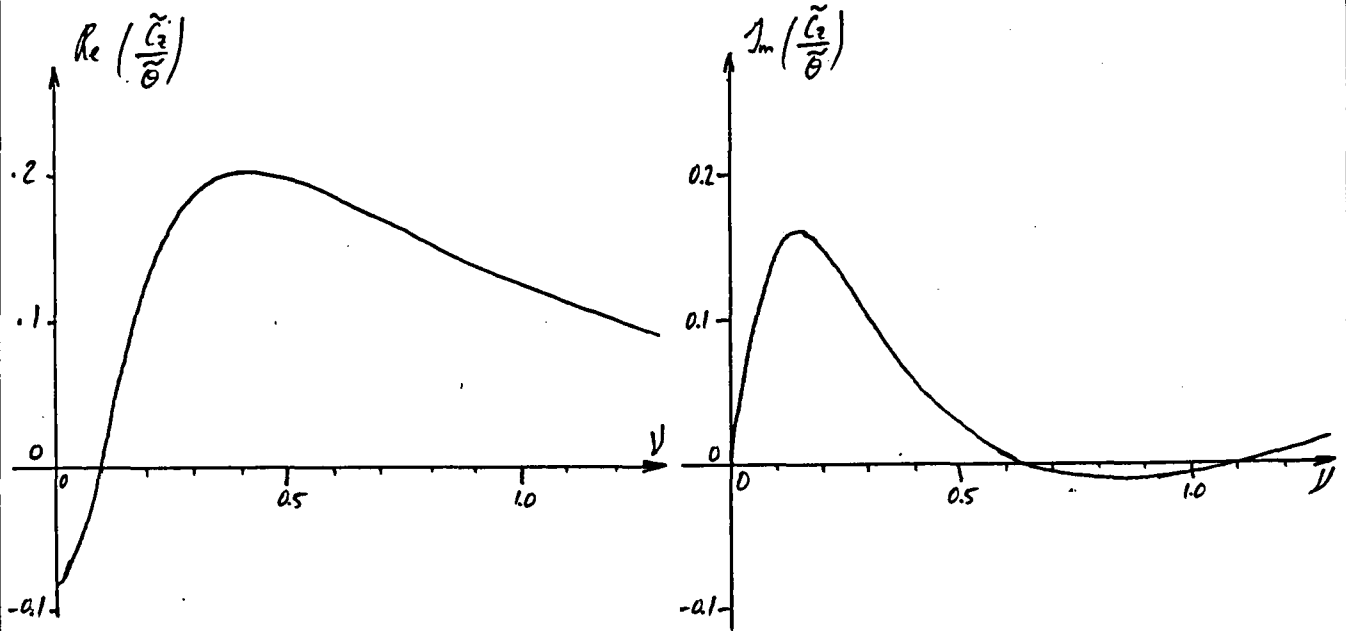


Fig 6 - Type de comportement rencontré pour le coefficient de portance en fonction de la fréquence réduite pour une vibration autour du quart avant à une incidence décrochée.

$d = 0.2$
 $r = 0.$
 $\lambda = 0.087$

$\lambda = 0.15$
 $a = 1.$
 $e = -1.$

$\frac{\partial C_L}{\partial \theta} = 0.103$
 $\frac{\partial \Delta C_L}{\partial \theta} = +0.180$

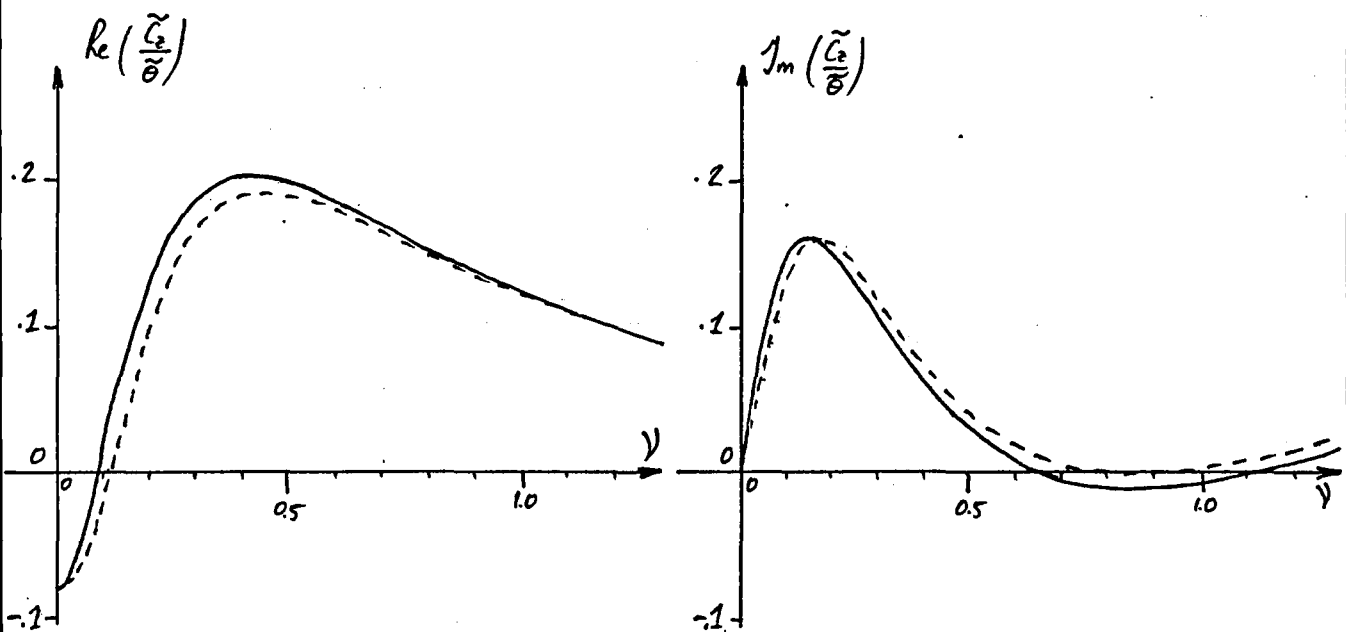


Fig 7 - Influence du paramètre d

— $d = 0.2$
 - - - $d = 0.1$

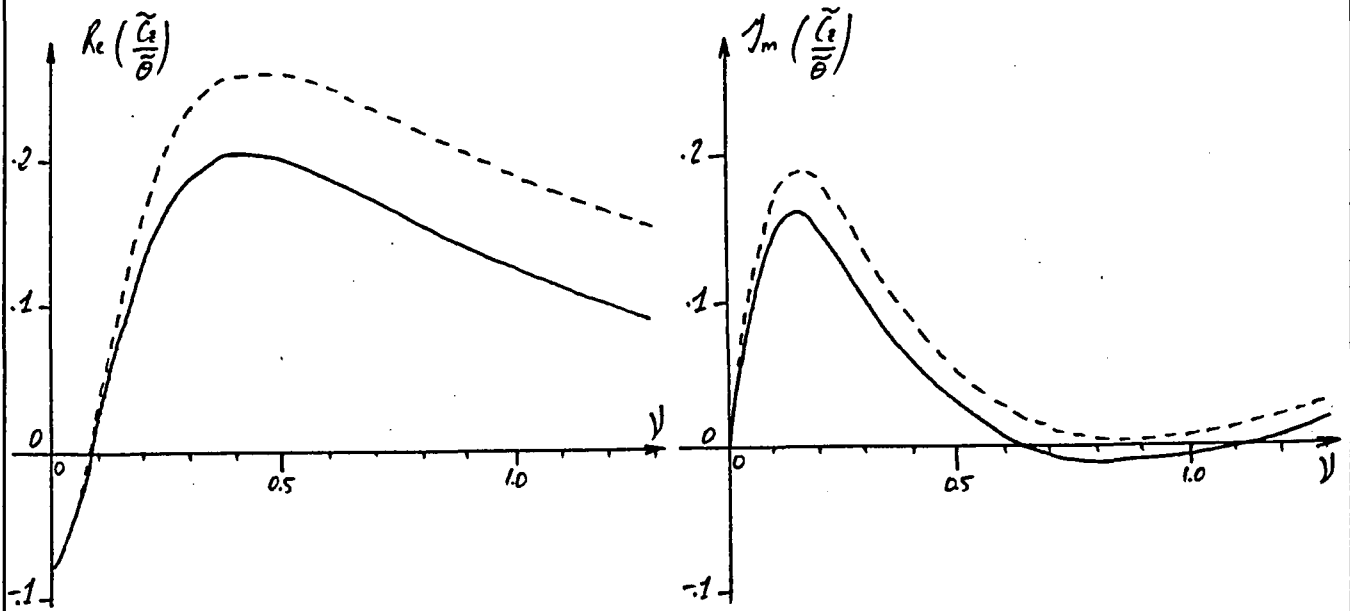


Fig 8 - Influence du paramètre σ

— $\sigma = 0.$
 - - - $\sigma = 0.068$

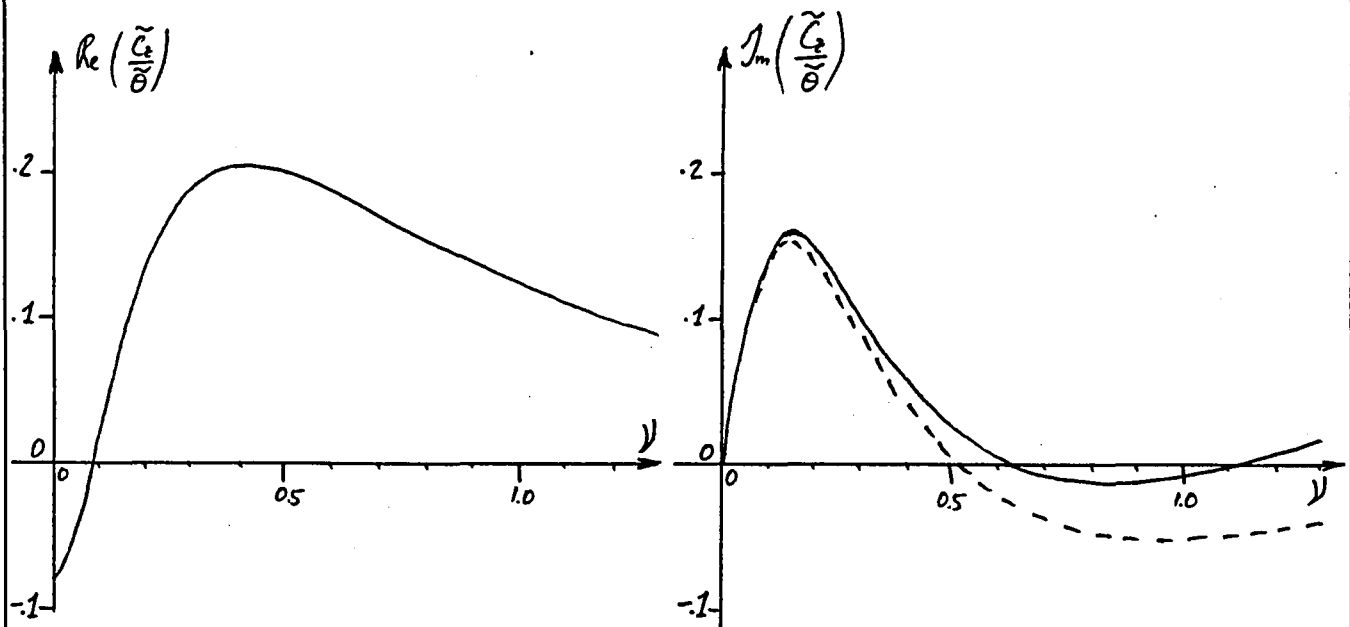


Fig 9 - Influence du paramètre λ

(pas d'action sur la partie réelle)

— $\lambda = 0.087$
 - - - $\lambda = 0.0435$

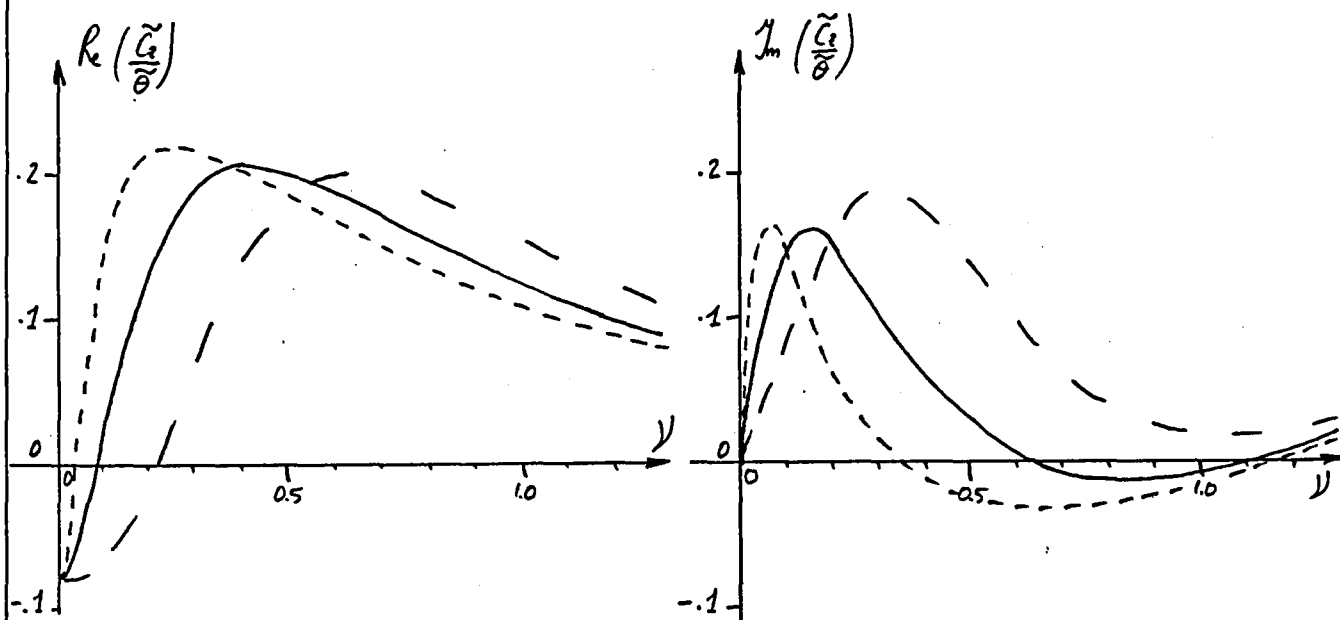


Fig 10 - Influence du paramètre r

——— $r = 0.15$
 - - - $r = 0.075$
 - · - $r = 0.30$

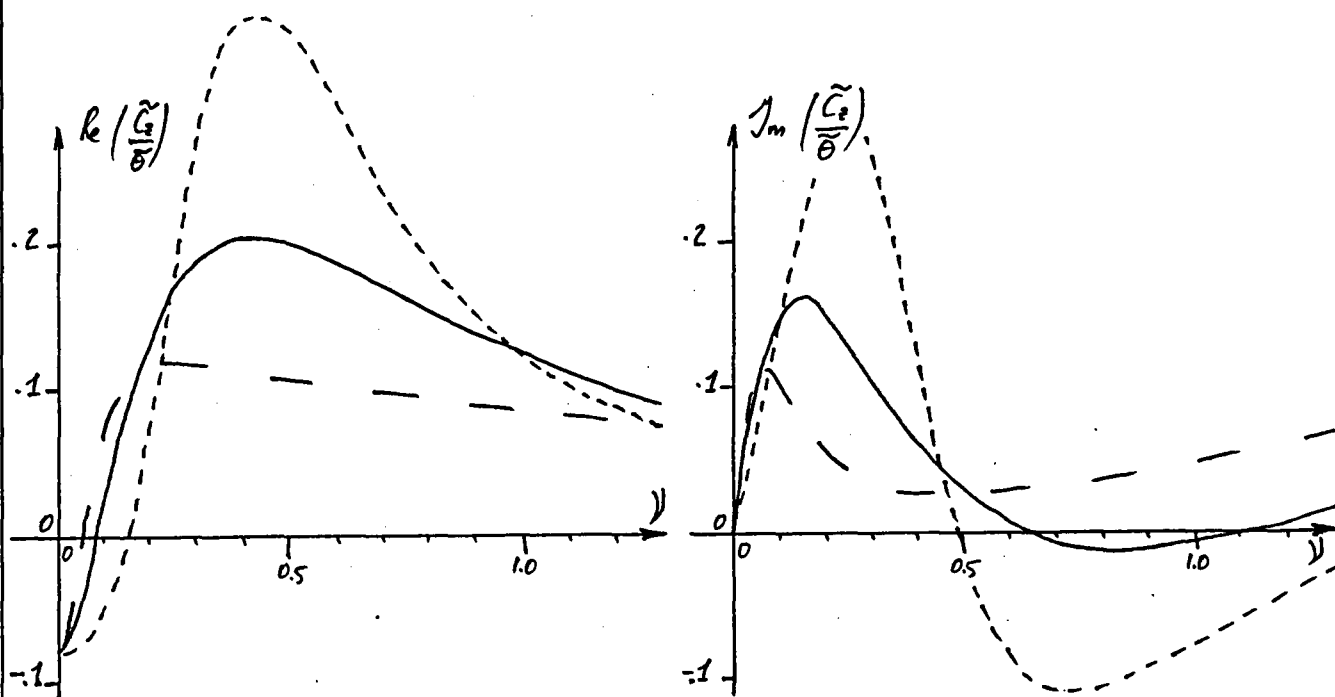


Fig 11 - Influence du paramètre a

——— $a = 1$
 - - - $a = 0.5$
 - · - $a = 2$

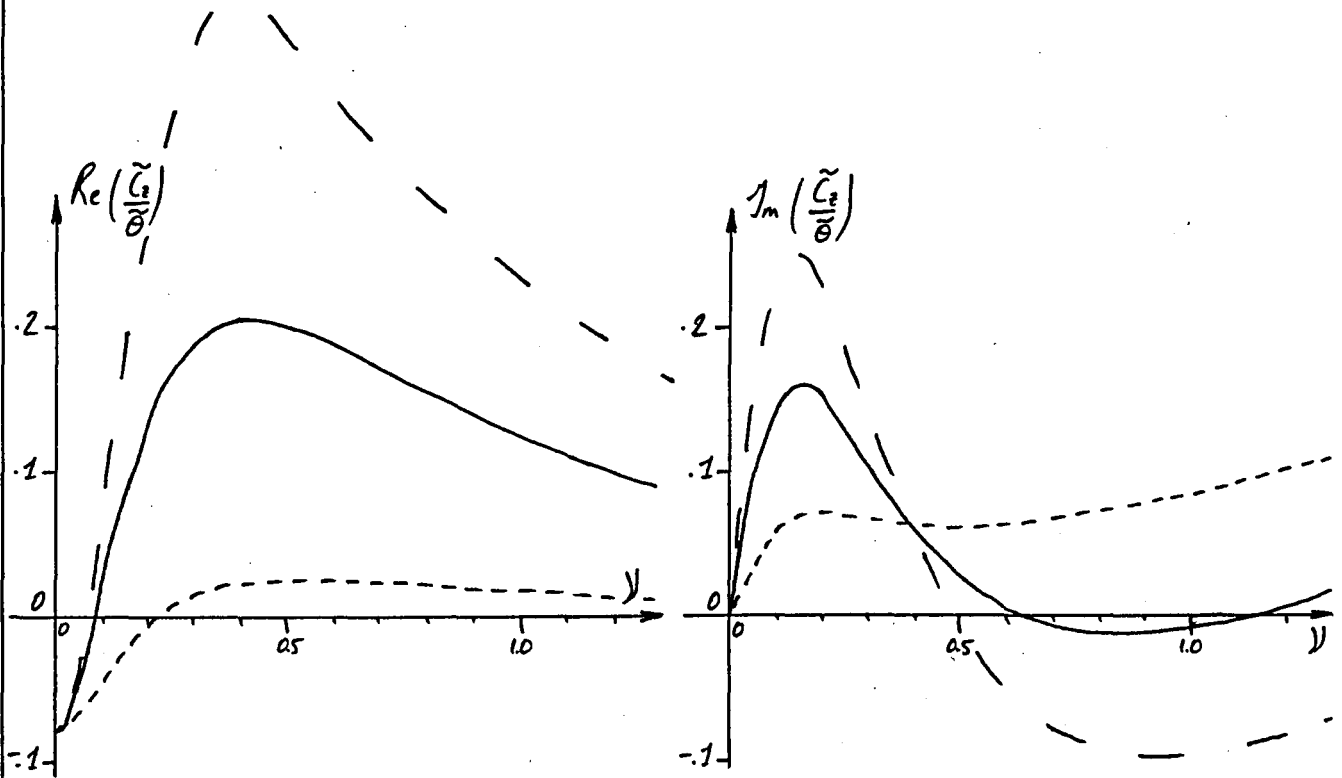


Fig 12 - Influence du paramètre e

— $e = -1.$
- - - $e = 0.$
- · - $e = -2.$

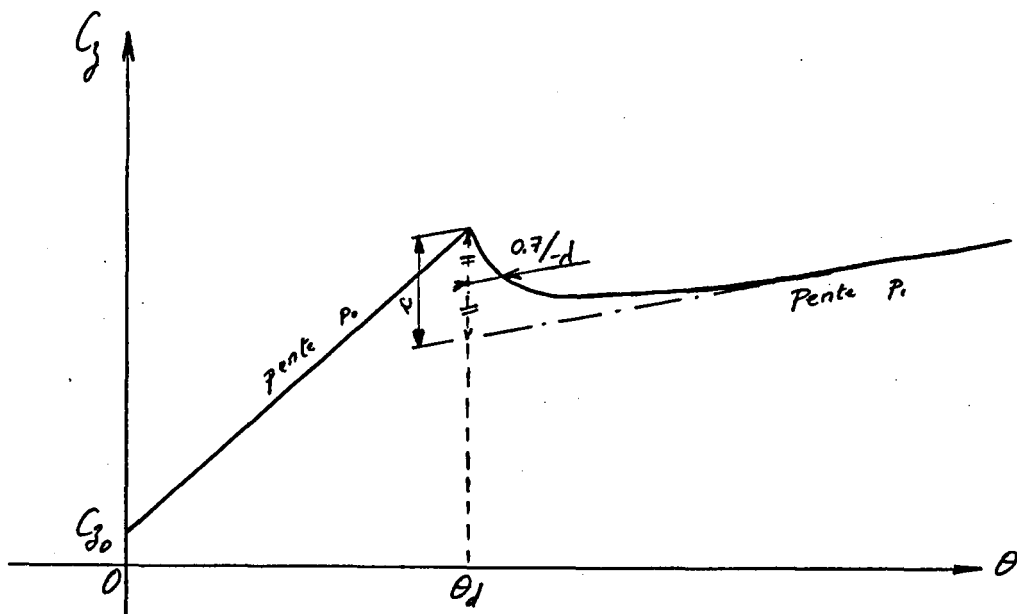


Fig 13 - Forme générale des Courbes statiques utilisées

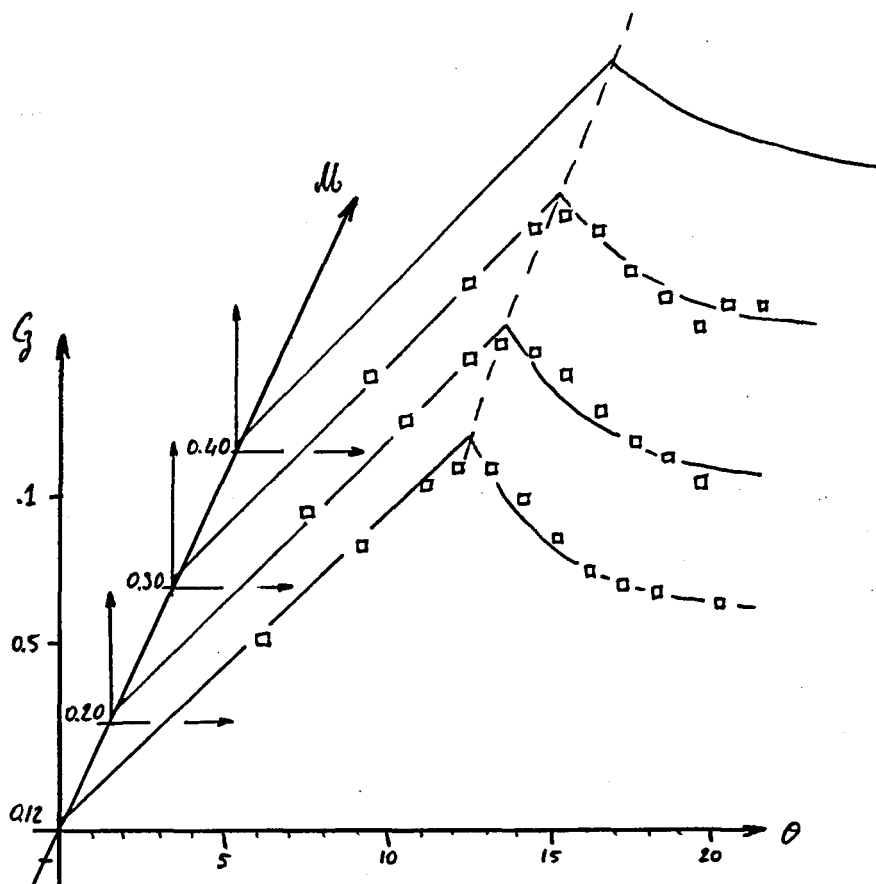


Fig 14 - Approximation retenue pour C_2 statique (θ, db)
 (\square = points expérimentaux CEAT)

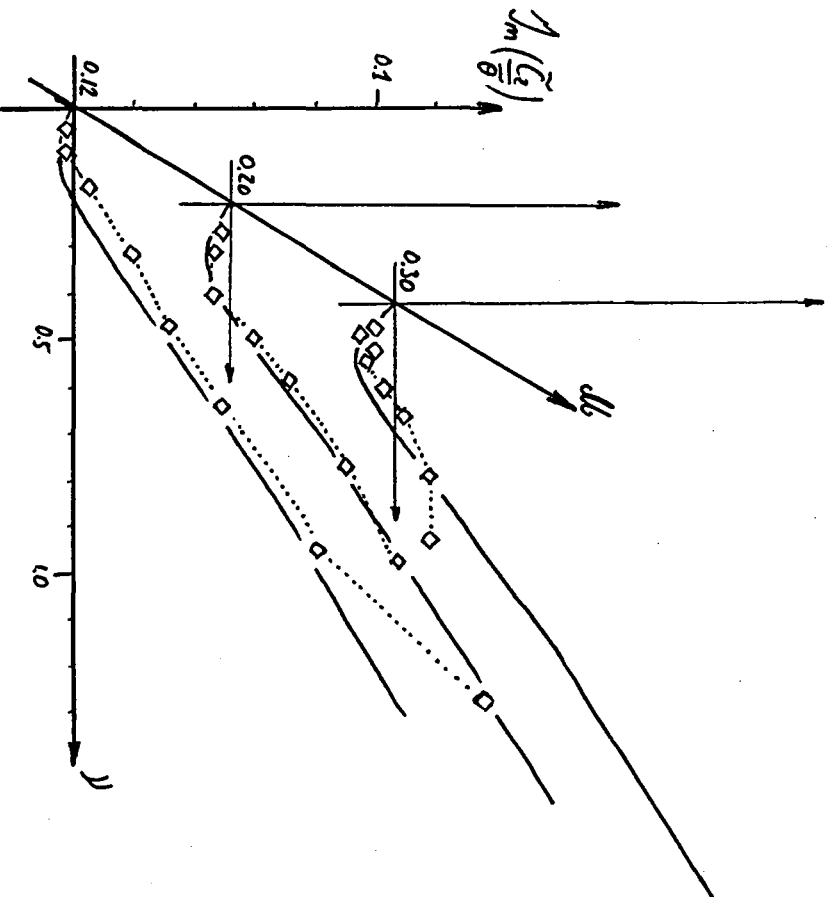
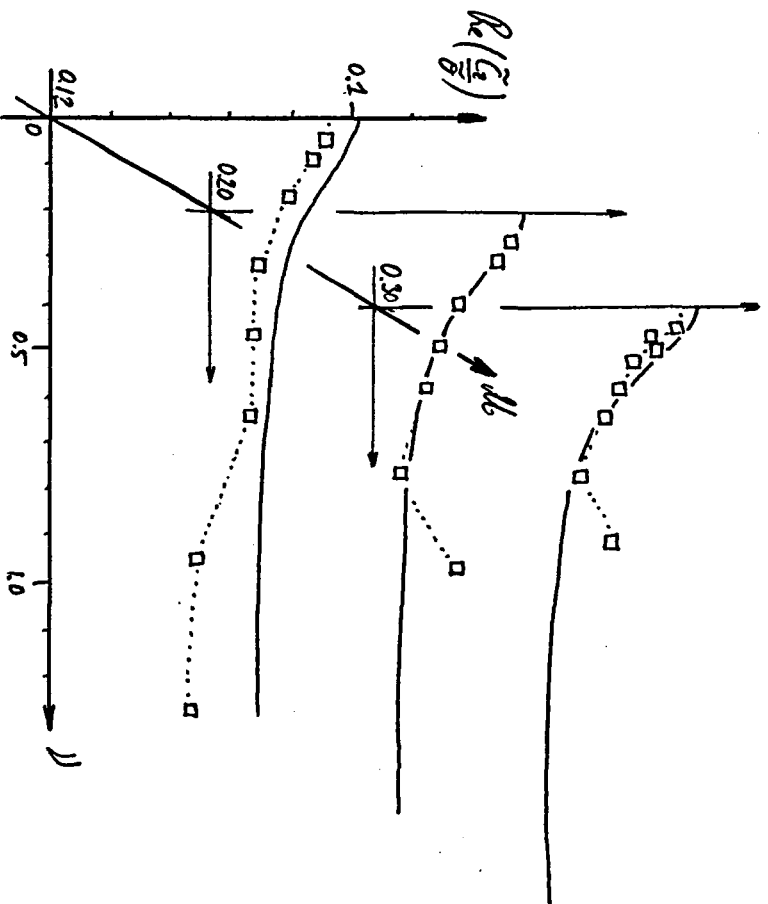


Fig 15- Partis réelles et imaginaires de la réponse à une petite vibration autour de l'incidence nulle

\square et \circ Points expérimentaux
 — et \dots Lissage utilisé

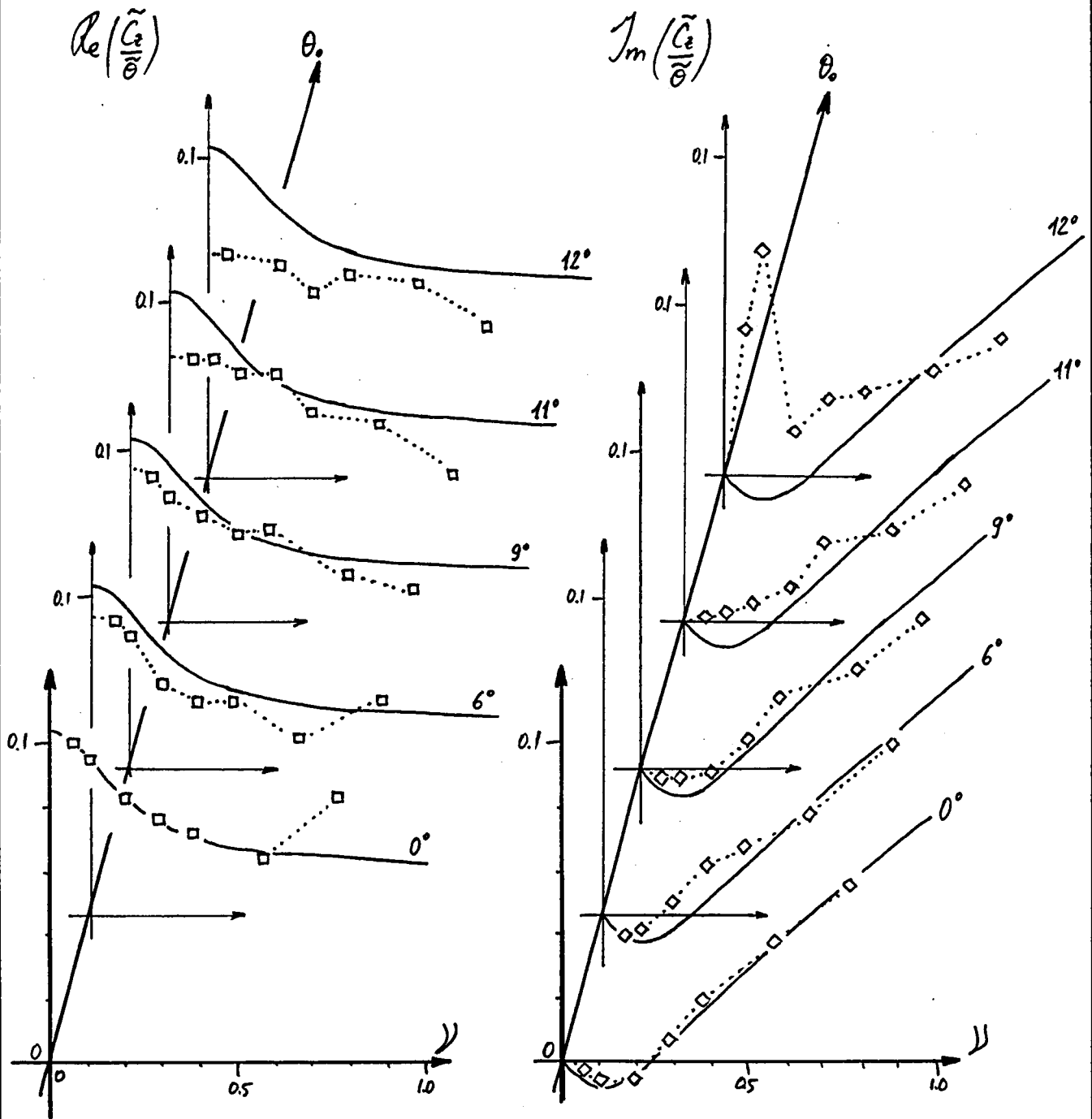


Fig 16 - $M_b = 0.20$ - Parties réelles et imaginaires de la réponse à une petite vibration autour de plusieurs incidences moyennes.

— Lissage utilisé, indépendant de l'incidence moyenne tant que l'incidence de décrochage ($\theta_d = 12.2^\circ$) n'est pas atteinte.

□ ◇ Mesures expérimentales

$$\Delta b = 0.12$$

(Angle de décrochage : 12.4°)

Incidence	13°	14°	15°	16°	17°	18°	20°
ΔC_z	0.216	0.481	0.675	0.851	0.994	1.121	1.352

z	0.0174	0.0143	0.1375	0.3139	0.6649	0.6091	—
a	0.2516	0.0889	0.9421	2.2157	3.5263	1.6942	—
e	-0.0667	-0.0373	-0.9107	-2.7749	-8.5972	-2.8635	—
σ	0.0379	0.0304	-0.0777	-0.1370	-0.2781	-0.1206	—
z retenu	0.0191	0.0656	0.1432	0.2413	0.3546	0.4795	0.7694

a	0.2775	-0.6656	0.9815	1.7749	1.9156	2.0513	—
e	-0.0773	-0.3212	-0.9677	-1.8210	-2.5972	-4.0278	—
σ	0.0346	-0.0258	-0.0826	-0.0988	-0.1263	-0.1569	—
σ retenu	0.0270	-0.0234	-0.0622	-0.0937	-0.1209	-0.1450	-0.1889

a	0.2771	0.6732	0.9890	1.7403	1.9348	2.0216	3.0419
e	-0.0776	-0.2916	-0.7994	-1.5613	-2.1568	-3.2675	-6.4816
a retenu	0.2793	0.5933	0.9977	1.4311	1.8797	2.3363	3.3074

e	-0.0738	-0.2600	-0.7594	-1.2277	-1.9976	-3.4434	-6.5535
e retenu	-0.0272	-0.3005	-0.8678	-1.6640	-2.6517	-3.8035	-6.6726

$$\delta b = 0.20$$

(Angle de décrochage : $12,2^\circ$)

Incidence	13°	14°	15°	16°	17°	18°
ΔC_z	0.259	0.504	0.695	0.852	0.989	1.113

z	0.0092	0.0323	0.0411	0.0709	0.0343	0.3962
a	0.1544	0.2478	0.1568	0.3719	0.1558	1.9280
e	-0.0132	-0.1043	-0.0579	-0.2614	0.0773	-4.2343
∇	0.0609	0.0338	0.0241	0.0305	0.0305	-0.1796
z retenu	0.0154	0.0327	0.0579	0.0884	0.1236	0.1630

a	0.2871	0.2508	0.2527	0.4805	0.5353	0.7927
e	-0.0443	-0.1067	-0.1493	-0.3908	-0.2020	-0.6546
∇	0.0498	0.0330	0.0039	0.0131	0.0399	-0.0139
∇ retenu	0.0411	0.0218	0.0067	-0.0057	-0.0165	-0.0263

a	0.2816	0.2487	0.2534	0.4734	0.5158	0.7877
e	-0.0463	-0.1117	-0.1471	-0.4297	-0.3769	-0.7197
a retenu	0.2268	0.3016	0.3932	0.4904	0.5912	0.6955

e	-0.0424	-0.1221	-0.1725	-0.4397	-0.4080	-0.6614
e retenu	-0.0104	-0.0768	-0.2014	-0.3711	-0.5804	-0.8272

$$\underline{M = 0.30}$$

(Angle de décrochage : 11.9°)

Incidence	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°
ΔC_z	0.043	0.335	0.551	0.723	0.869	0.999	1.120

α	0.0129	0.0249	0.0439	0.0451	0.1103	0.1101	0.2216
α	0.6208	0.3577	0.3671	0.2710	0.5750	0.5647	0.9612
e	-0.0101	-0.0895	-0.2359	-0.1519	-0.6162	0.4671	-2.1700
γ	0.0349	-0.0172	-0.0057	0.0037	-0.0453	0.0113	-0.1690
α retenu	0.0102	0.0193	0.0378	0.0626	0.0923	0.1265	0.1654

α	0.4970	0.2846	0.3179	0.3989	0.4840	0.6470	0.6906
e	-0.0026	-0.0536	-0.1821	-0.2862	-0.4274	-0.6274	-1.0860
γ	0.0377	-0.0031	-0.0145	-0.0220	-0.0194	-0.0060	-0.0881
γ retenu	0.0502	0.0271	0.0101	-0.0035	-0.0151	-0.0253	-0.0349

α	0.5323	0.3042	0.3291	0.4095	0.4854	0.6390	0.7064
e	0.0031	-0.0423	-0.1640	-0.2588	-0.4166	-0.7038	-0.8183
α retenu	0.2007	0.2449	0.3214	0.4091	0.5021	0.5992	0.7018

e	-0.0018	-0.0421	-0.1626	-0.2587	-0.4230	-0.6800	-0.8155
e retenu	0.0000	-0.0226	-0.1004	-0.2268	-0.3937	-0.5982	-0.8430

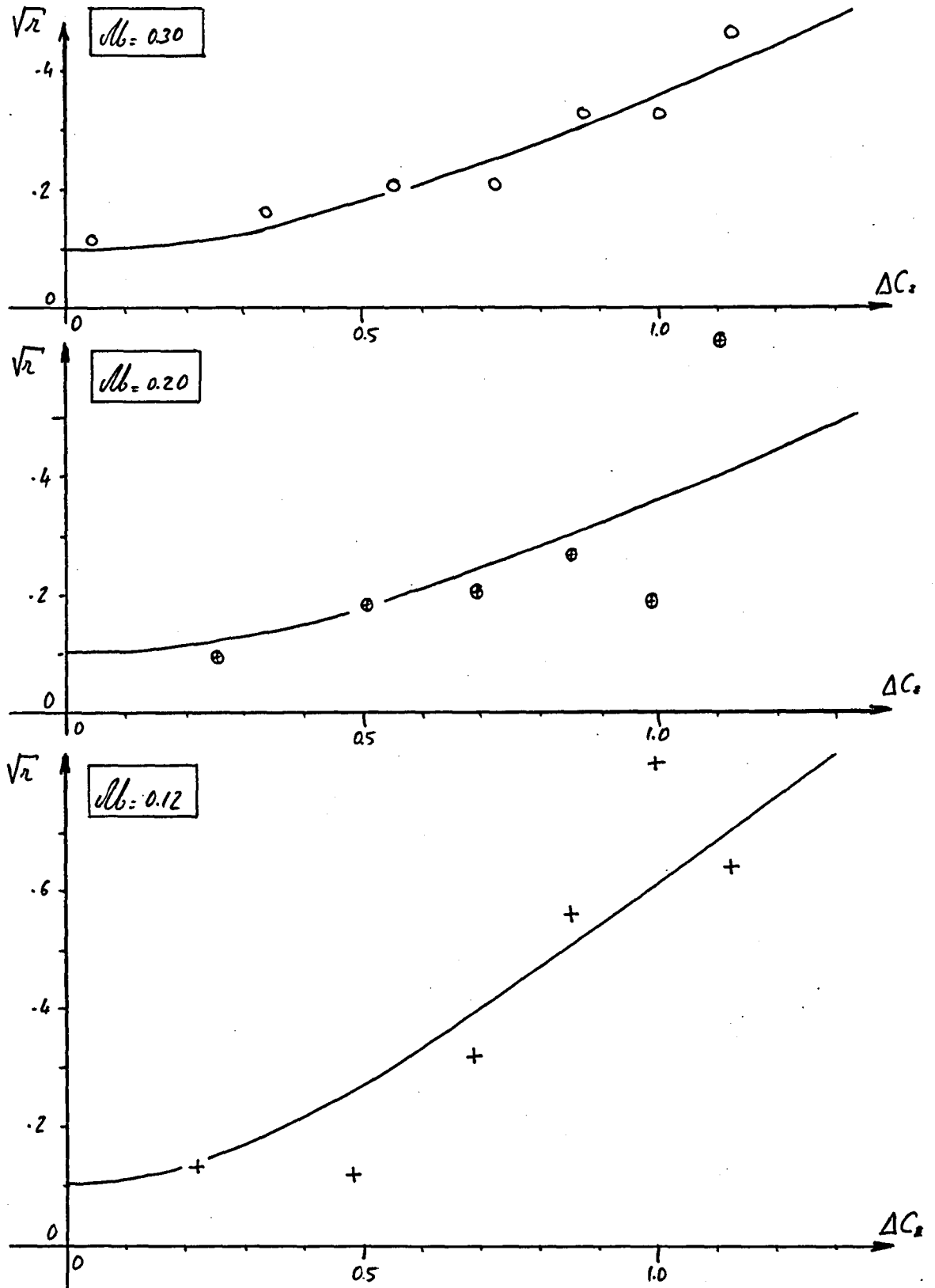


Fig 17 - Recherche de r

+⊙ Meilleure approximation des points expérimentaux
 — Lissage retenu

$$\sqrt{r} - 0.1 = \alpha x + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha x - \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \quad \text{pour } \Delta b = 0.12 \\ \alpha = 0.65 \quad \text{pour } \Delta b \geq 0.20 \\ \beta = -1 \end{array} \right.$$

40 120

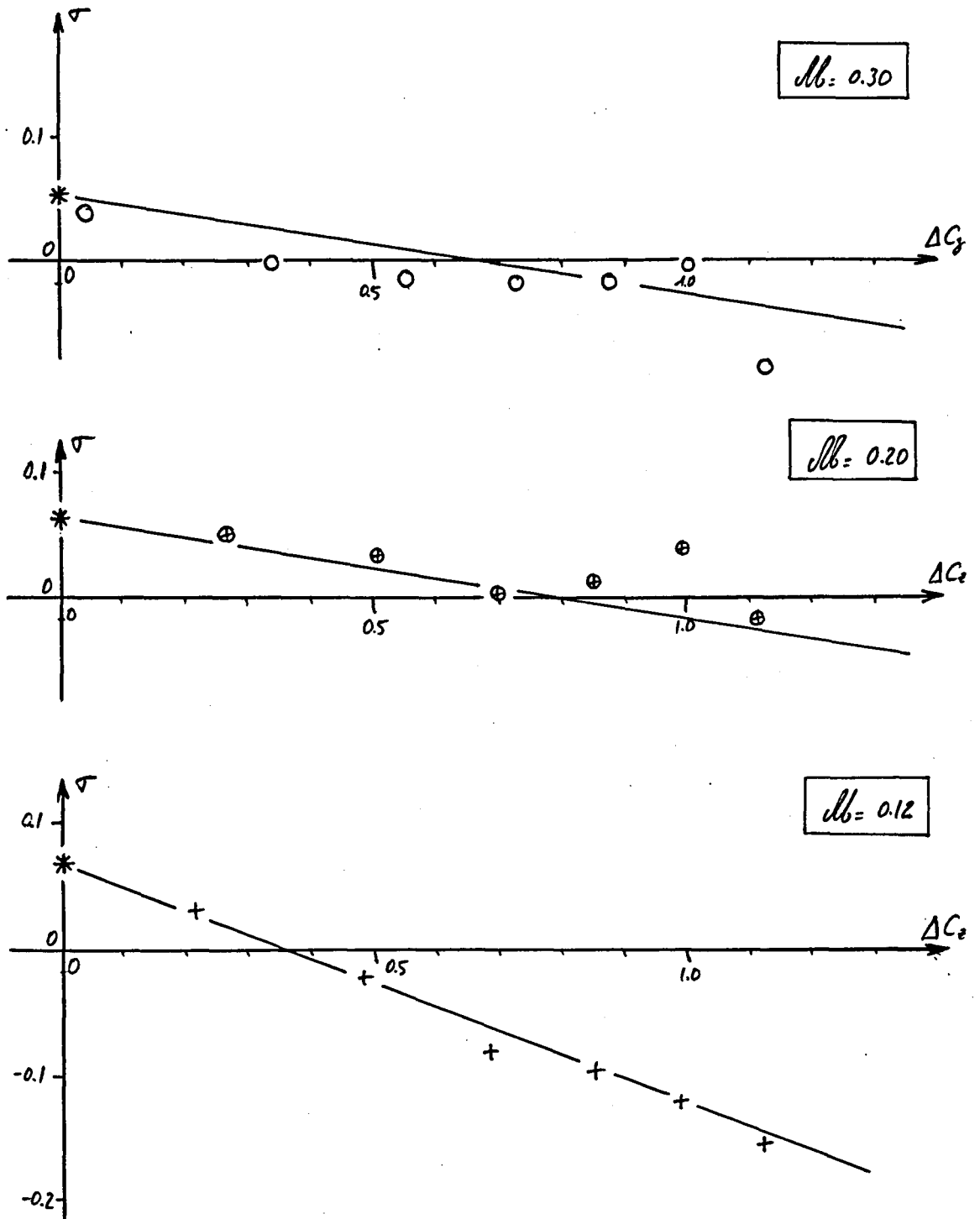


Fig 18 - Recherche de τ

* Valeurs de τ pour les incidences non décrochées déjà déterminées

+ ⊕ ○ Meilleure approximation des points expérimentaux

— Lissage retenu

$$\tau = 0.0775 - 0.08 lb - 0.19 \Delta C_2 \quad \text{si } lb = 0.12$$

$$\tau = 0.0775 - 0.08 lb - 0.079 \Delta C_2 \quad \text{si } lb \geq 0.20$$

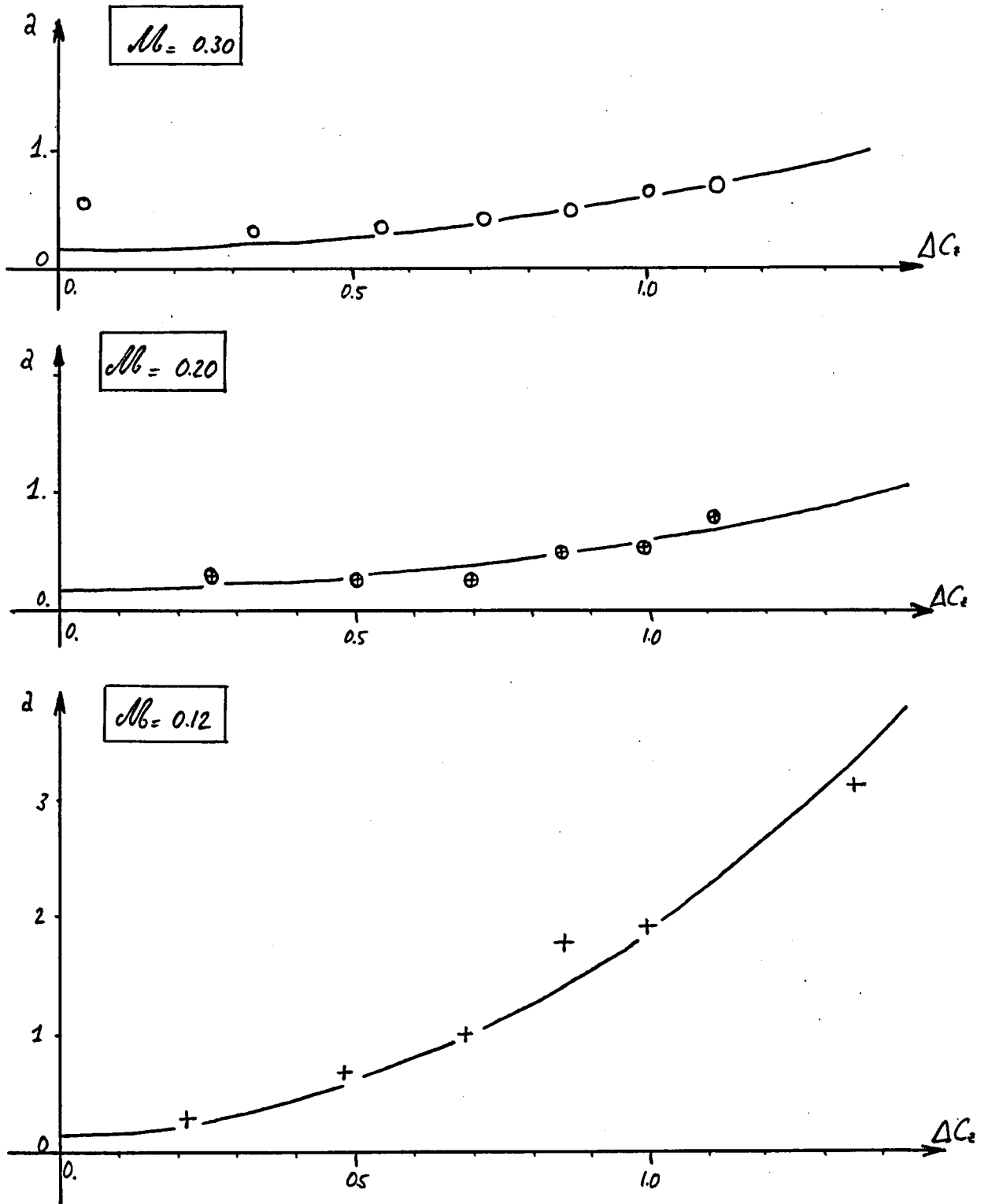


Fig 19 - Recherche de a

○ ⊕ + Meilleure approximation des points expérimentaux

— Lissage retenu

$$a = 0.15 + 1.75 \Delta C_2^2 \quad \text{pour } M_b = 0.12$$

$$a = 0.15 + 0.45 \Delta C_2^2 \quad \text{pour } M_b \geq 0.20$$

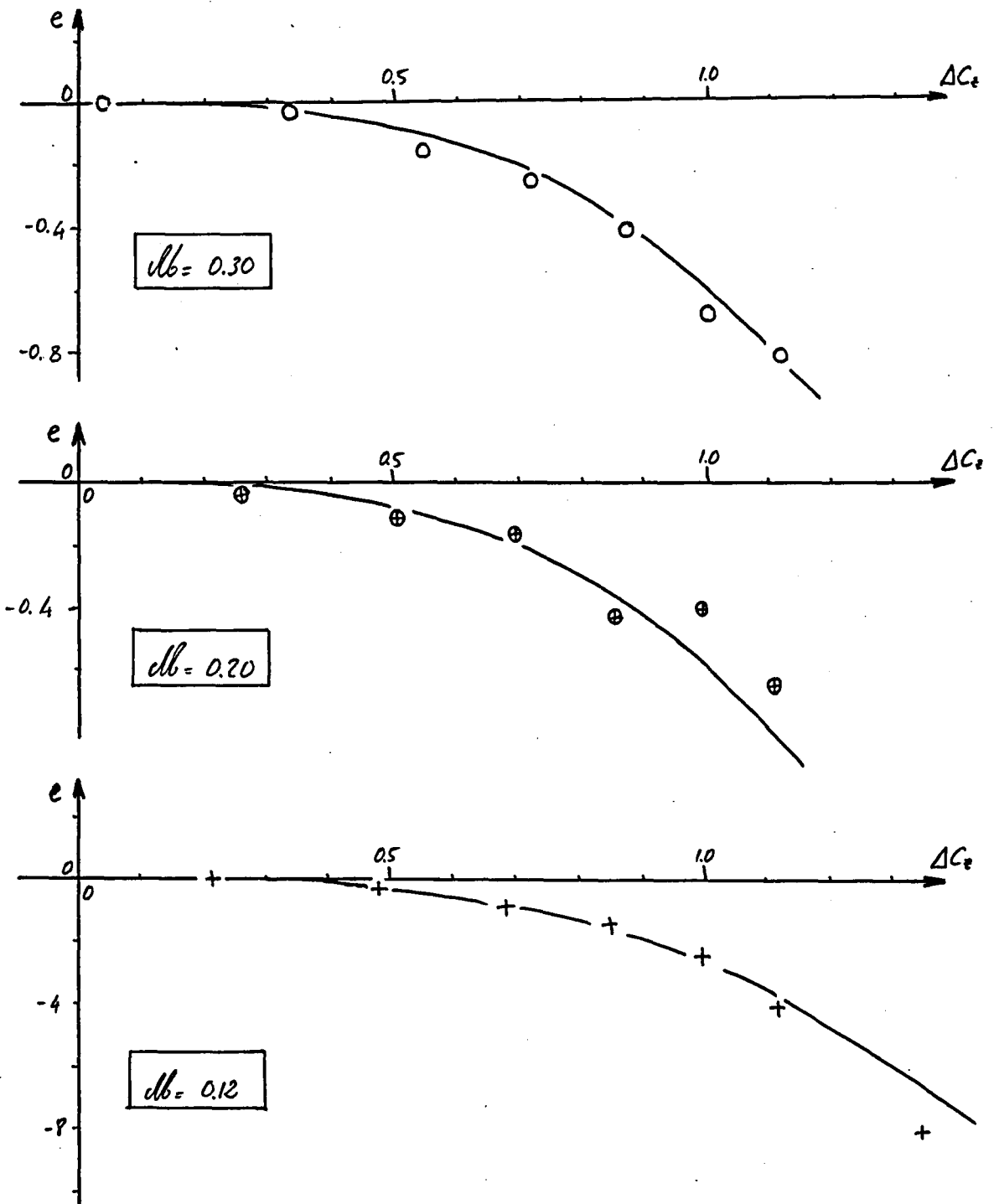


Fig 20 - Recherche de e

+ ⊕ ○ Meilleure approximation des points experimentaux

— Lissage retenu

$$e = -2.7 \Delta C_2^3$$

pour $db = 0.12$

$$e = -0.6 \Delta C_2^3$$

pour $db \geq 0.20$

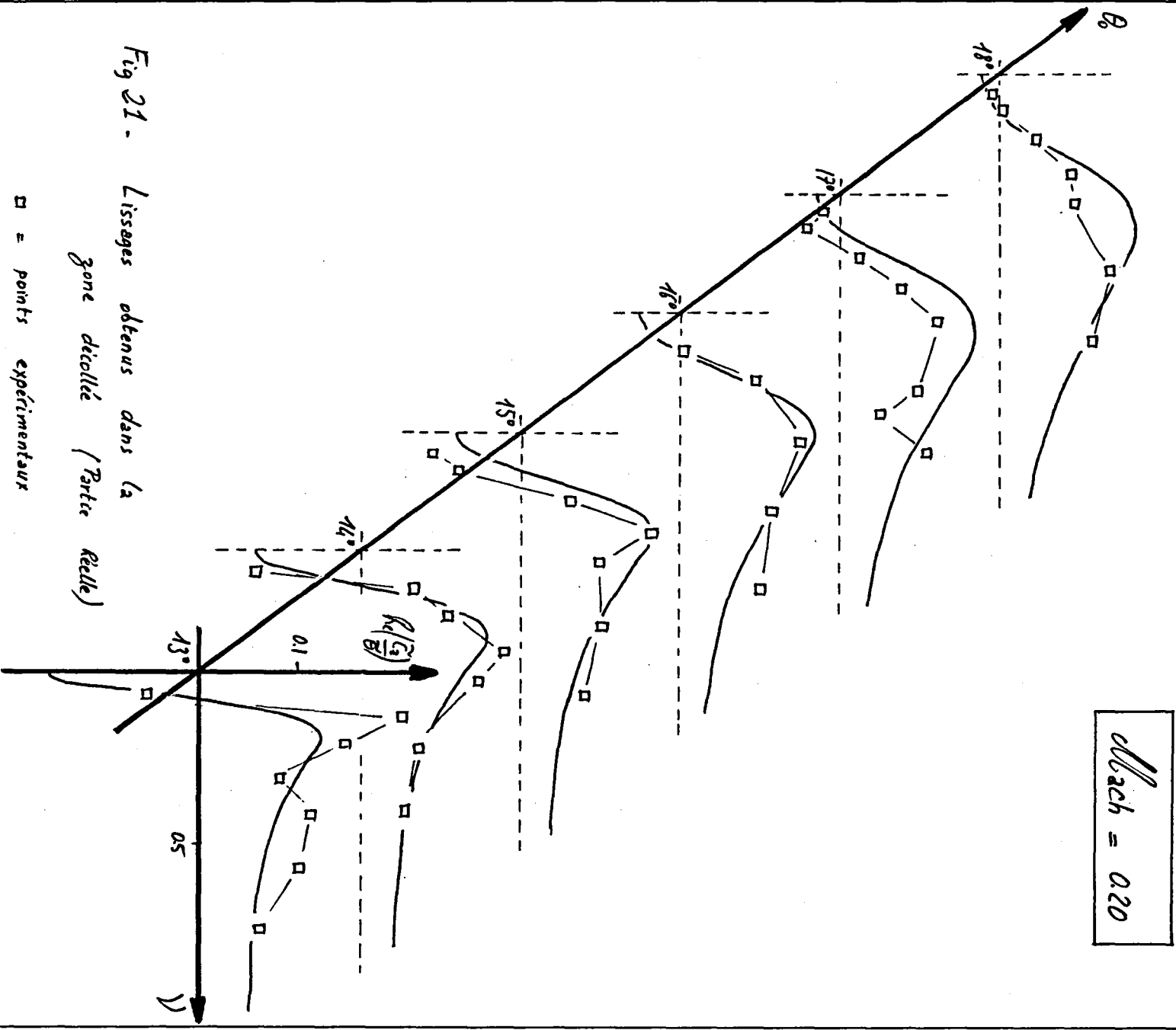


Fig 21 - Lissages obtenus dans la zone décollée (Partie Reelle)

Wbach = 0.20

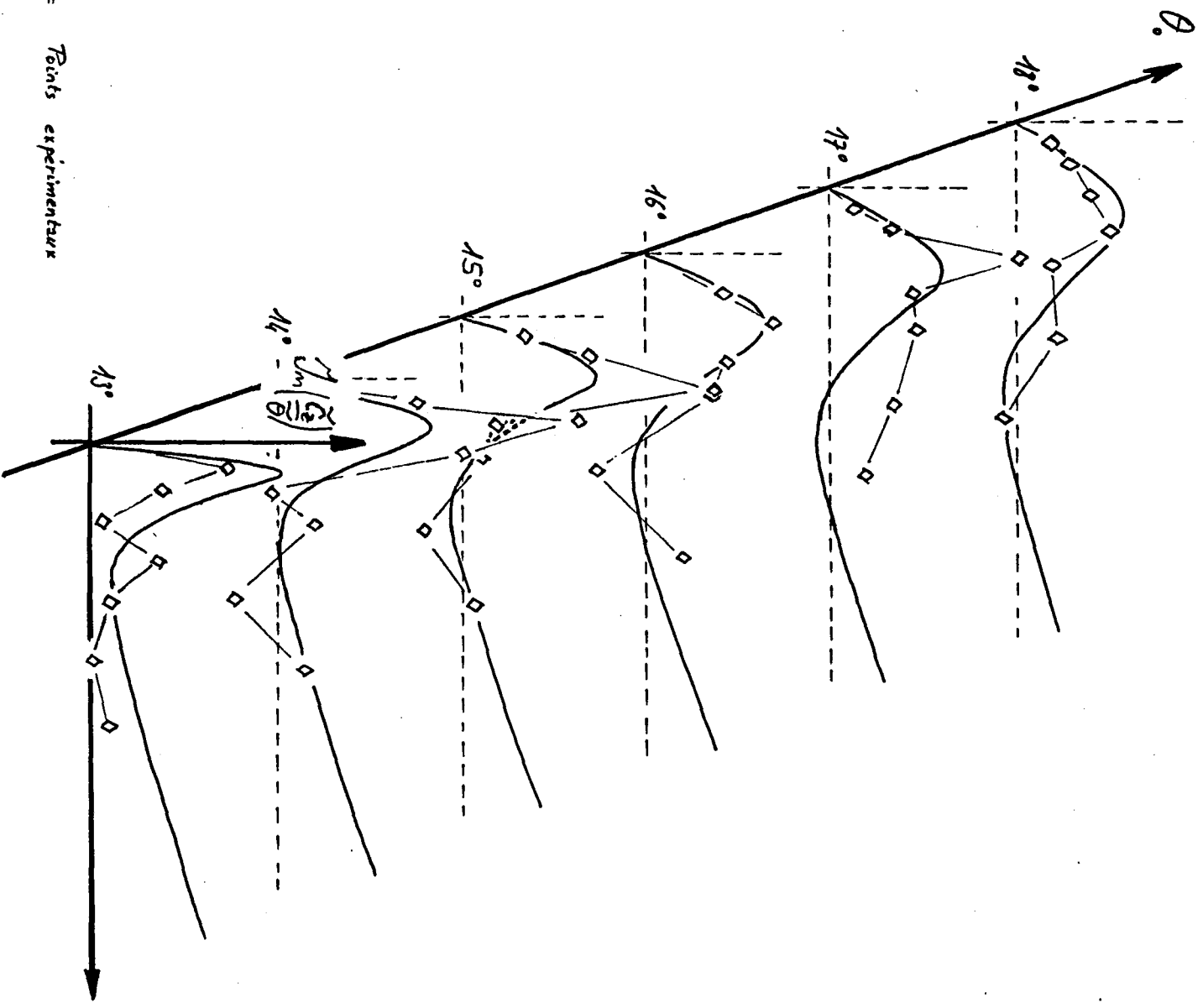


Fig 22 - Lisages obtenus dans la zone détaillée - Partie imaginaire

$Albach = 0.20$

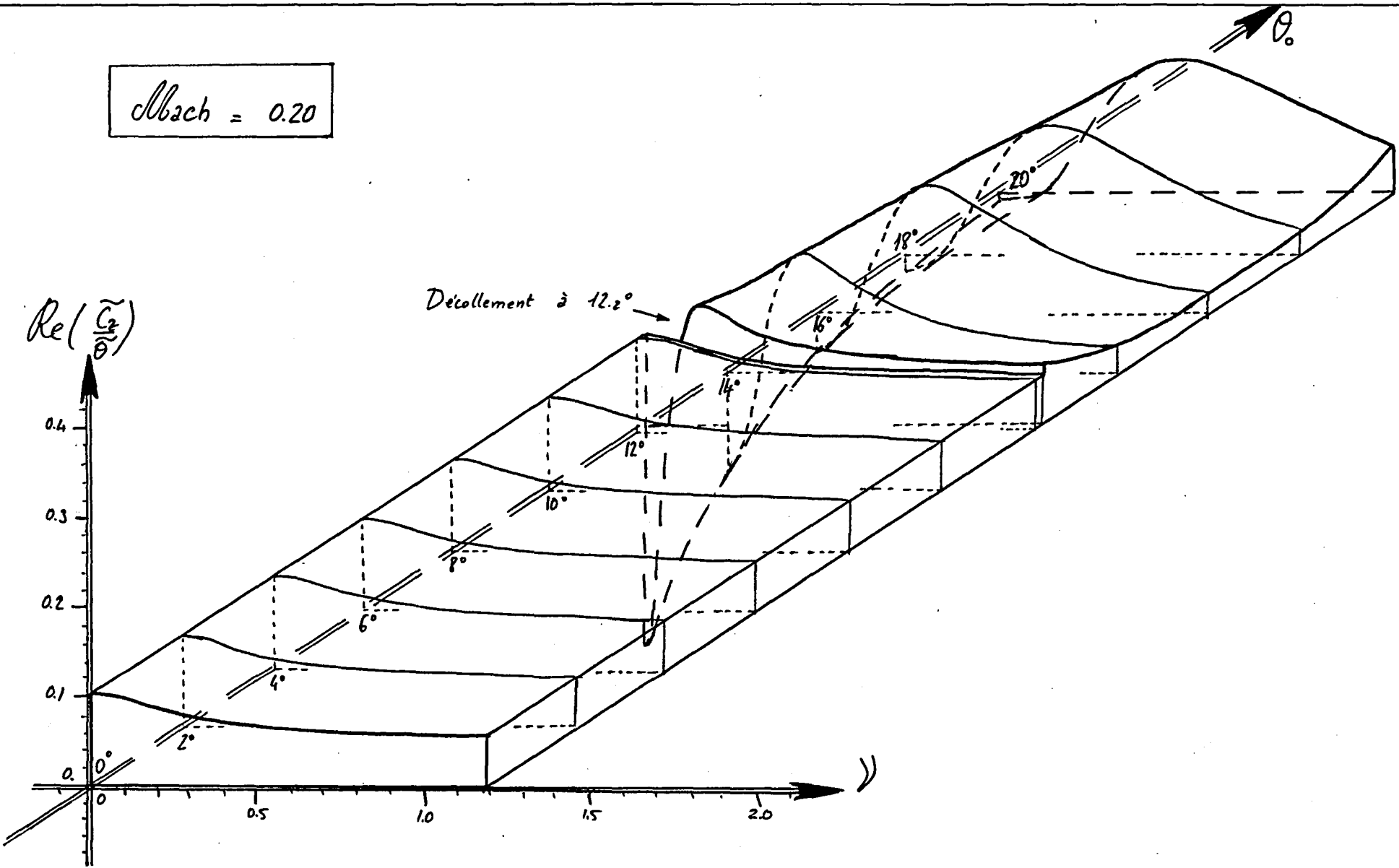


Fig 23 - Partie réelle de la portance pour une vibration autour du quart-avant ; Lissage retenu .

$Mach = 0.20$

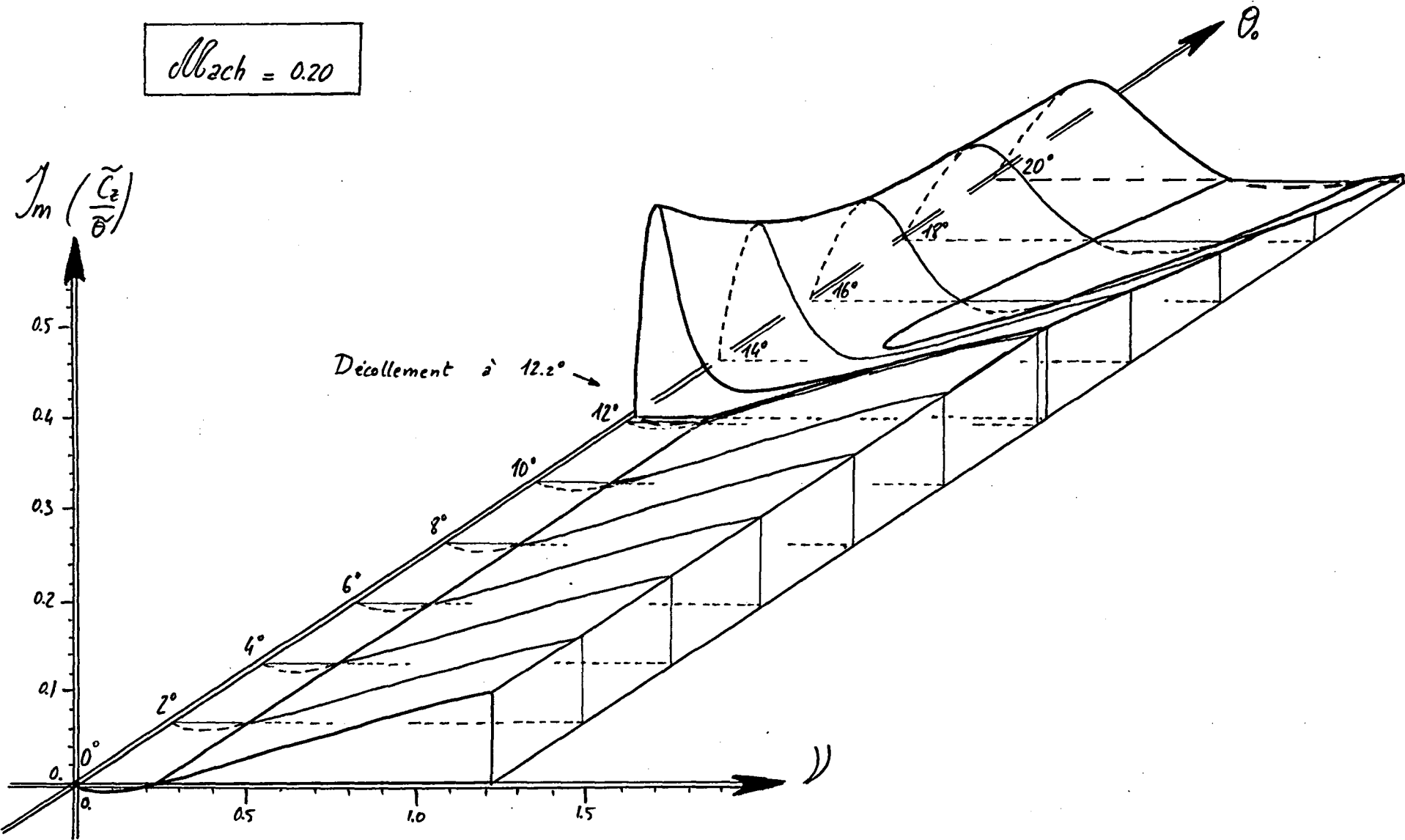
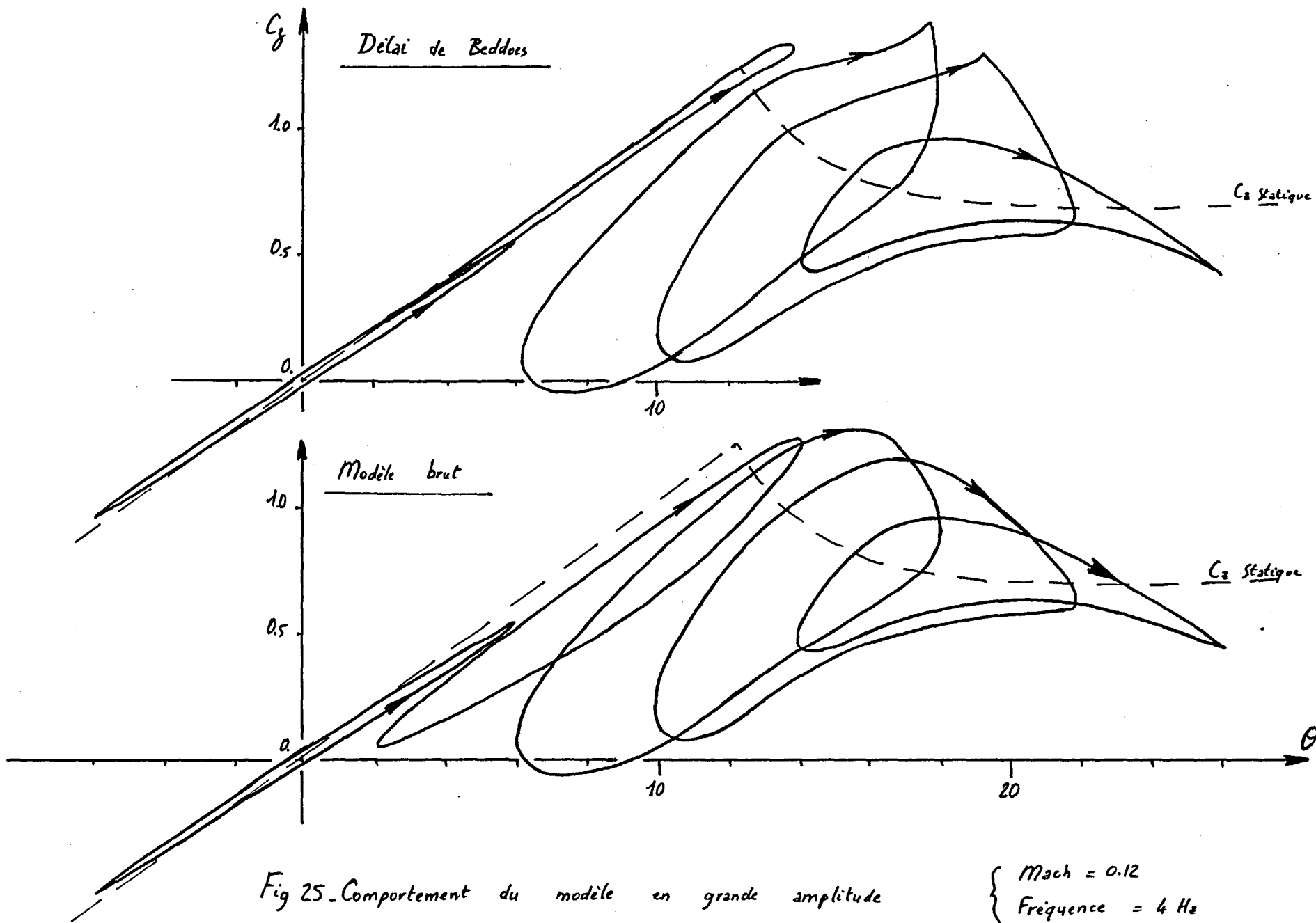


Fig 24 - Partie imaginaire de la portance pour une vibration autour du quart avant ; lissage retenu



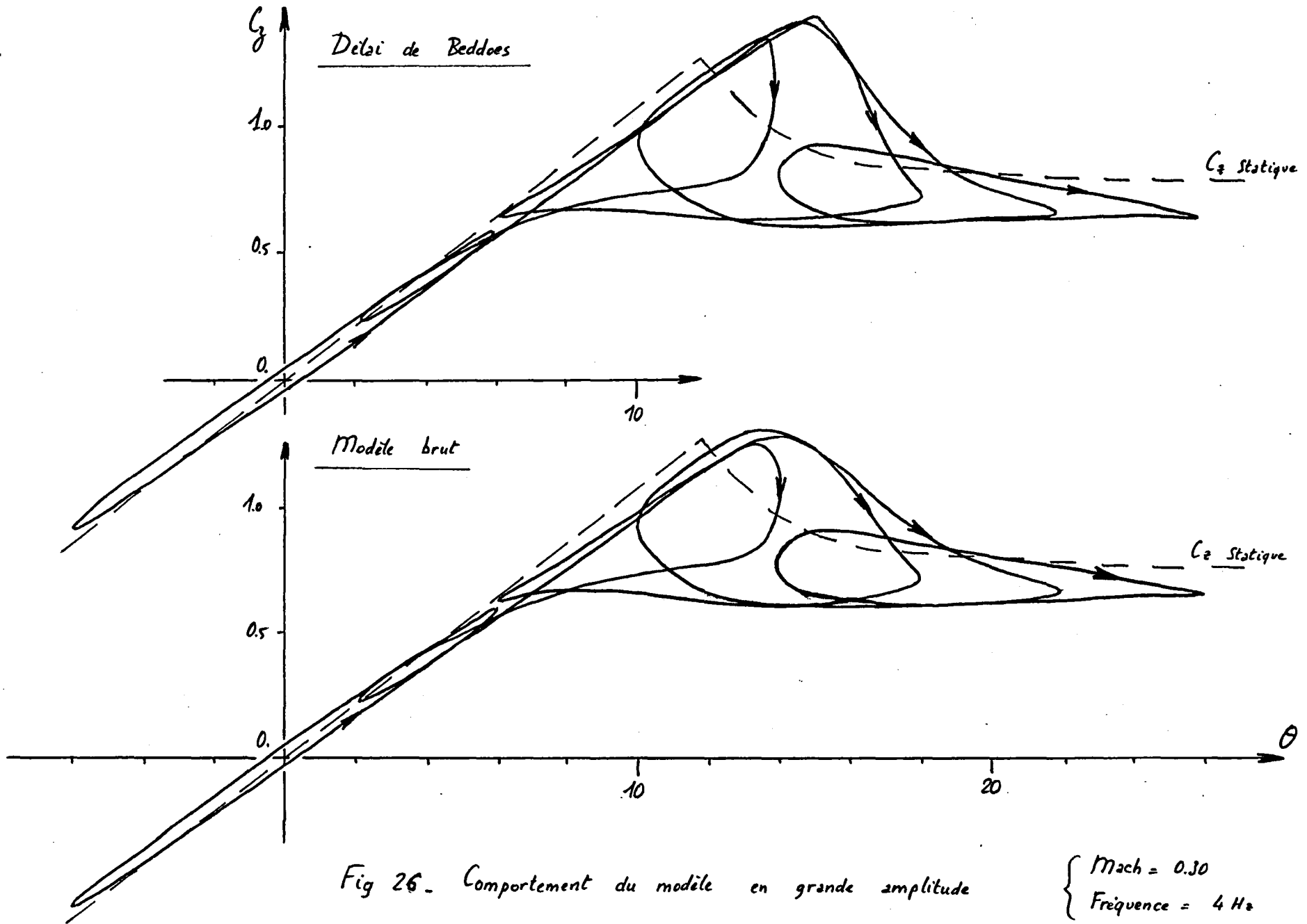


Fig 26. Comportement du modèle en grande amplitude

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mach} = 0.30 \\ \text{Fréquence} = 4 \text{ Hz} \end{array} \right.$

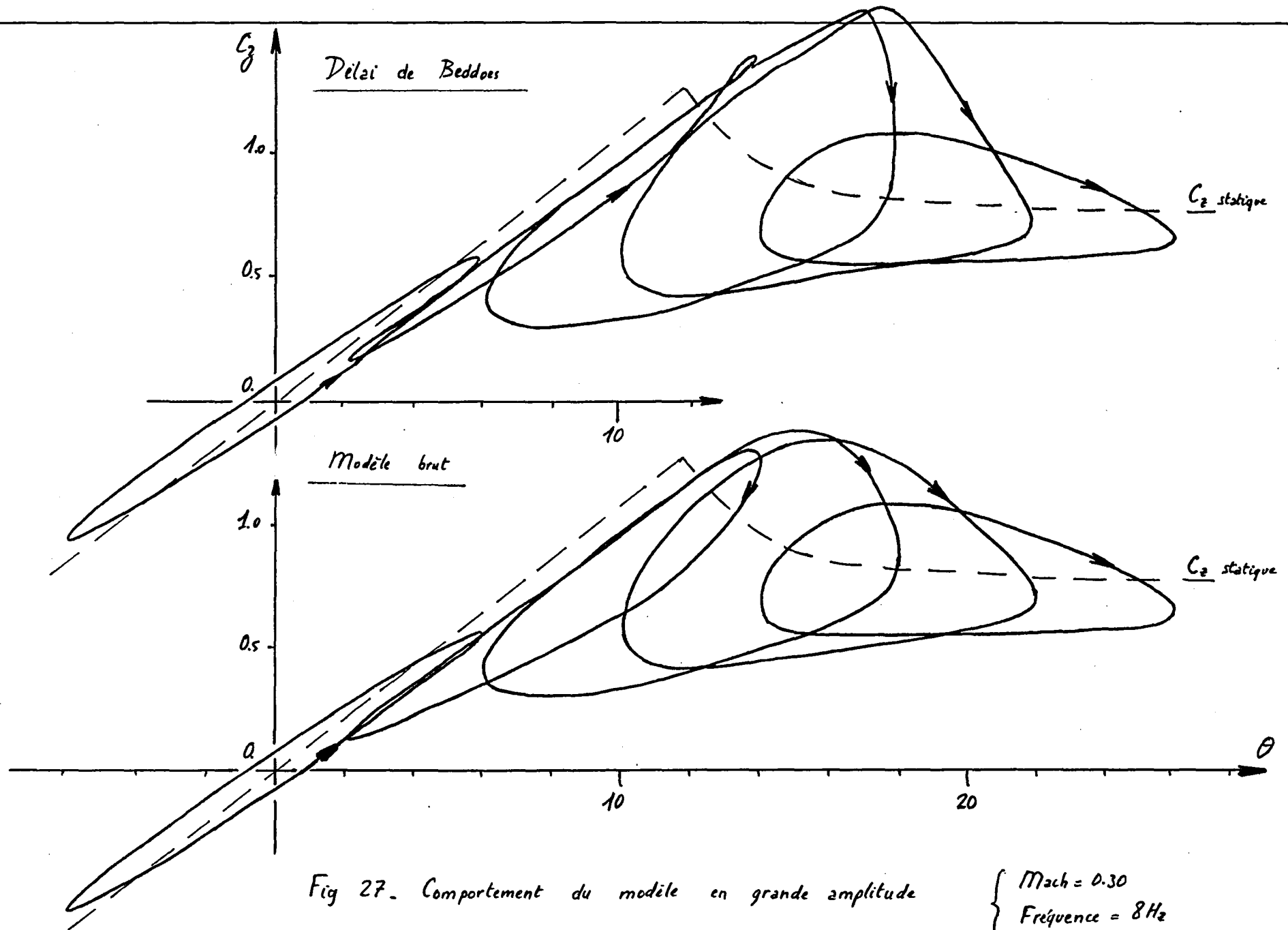


Fig 27. Comportement du modèle en grande amplitude

$\left\{ \begin{array}{l} Mach = 0.30 \\ \text{Fréquence} = 8 \text{ Hz} \end{array} \right.$

ANNEXE A

Algorithme de recherche des coefficients dans
le domaine non décroché

Dans le domaine non décroché $C_q = C_q$; C_q est solution de l'équation

$$\dot{C}_q + d C_q = d C_{q0} + (dA + \sigma) \dot{\theta} + A \ddot{\theta}$$

Si

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta} e^{j\gamma z} \quad \text{et} \quad C_q = C_{q0} + \tilde{C}_q e^{j\gamma z}$$

Alors

$$\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} = \frac{d \frac{\partial C_{q0}}{\partial \theta} + j\gamma (dA + \sigma) - \gamma^2 A}{j\gamma + d}$$

On utilise l'algorithme de Dat-Meurzec[10] pour optimiser les points expérimentaux par cette fraction rationnelle $\frac{N(\gamma)}{D(\gamma)}$.

Notons les points expérimentaux

$$\left[\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}} \right]_{\gamma_k, \theta_{0k}, dA_k} = z_k = X_k + jY_k$$

Notre famille de paramètres représentera d'autant mieux les points expérimentaux que l'on minimisera

$$\text{erreur} = \sum_k P_k(\gamma_k) \left\{ \frac{N_k}{D_k} - z_k \right\}^2$$

où P_k est un poids positif

et $\{z\}$ désigne la norme $\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

Nous minimiserons en fait :

$$\text{Erreur} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} \left\{ N_k - z_k D_k \right\}^2$$

Si on prend $a_k = 1$ à une première itération et $a_k = \{D_k\}^2$, D_k étant évalué à l'itération précédente, pour les itérations suivantes, notre suite de minimisation tendra vers le minimum recherché, si toutefois l'algorithme est stable.

On pose $b = d + \sigma$ et on développe. L'erreur devient :

$$\text{Erreur} = \sum_k \frac{P_k (y_k)}{a_k} \left\{ \left(d \frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} - \lambda y_k^2 - x_k d + y_k y_k \right)^2 + \mu \left(b y_k^2 - x_k y_k - d y_k \right)^2 \right\}$$

La minimisation de l'erreur s'obtient en annulant $\frac{\partial \text{Erreur}}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \text{Erreur}}{\partial b}$, et $\frac{\partial \text{Erreur}}{\partial d}$ simultanément. Cela conduit au système linéaire suivant :

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M \begin{pmatrix} d \\ b \\ \lambda \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - x_k \right]^2 + \mu y_k^2 & -\mu y_k y_k & -y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - x_k \right] \\ -\mu y_k y_k & \mu y_k^2 & 0 \\ -y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - x_k \right] & 0 & y_k^4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -y_k y_k \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k + \mu x_k \right] \\ \mu x_k y_k^2 \\ y_k y_k^3 \end{pmatrix}$$

dont la solution est réinjectée dans le dénominateur $a_k = \{D_k\}^2$ pour une nouvelle itération. La convergence est presque immédiate.

Un tel algorithme est généralisable si on cherche les variables d, b, σ sous la forme :

$$d = d_i f_i (db, \theta)$$

$$b = b_i g_i (db, \theta)$$

$$\sigma = \sigma_i h_i (db, \theta)$$

f_i, g_i, h_i étant des fonctions prédéfinies (ex. $d = d_1 db + d_2$)

L'algorithme précédent est applicable, le système devenant :

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M' \begin{pmatrix} d_j \\ b_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V'$$

avec

$$M' = \begin{pmatrix} \left[\left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right]^2 + \mu Y_k^2 \right] f_j f_j & -\mu Y_k Y_k g_j f_i & -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] h_j f_i \\ -\mu Y_k Y_k f_j g_i & \mu Y_k^2 g_i g_j & 0 \\ -Y_k^2 \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k - X_k \right] f_j b_i & 0 & Y_k^4 h_j h_i \end{pmatrix}$$

et

$$V' = \begin{pmatrix} -Y_k Y_k \left[\left(\frac{\partial C_{qe}}{\partial \theta} \right)_k + \mu X_k \right] f_i \\ \mu X_k Y_k g_i \\ Y_k Y_k^3 h_i \end{pmatrix}$$

Application de cet algorithme à la deuxième équation

Le même raisonnement nous conduit au système suivant :

$$\sum_k \frac{P_k}{a_k} M \begin{pmatrix} x \\ a \\ e \end{pmatrix} = \sum_k \frac{P_k}{a_k} V$$

avec $a_k = 1$ pour la première itération

$$a_k = (\nu^2 - x)^2 + \mu a^2 \nu^2$$

a et x étant les valeurs trouvées à l'itération précédente.

On pose $X'_k + j Y'_k = X_k + j Y_k - \frac{\tilde{C}_k}{\theta}$

Alors

$$M = \begin{pmatrix} \left[X'_k + \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right]^2 + \mu Y_k'^2 & \nu_k Y_k' \left[(\mu-1) X'_k - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu \nu_k Y_k' \\ \nu_k Y_k' \left[(\mu-1) X'_k - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] & \nu_k^2 (Y_k'^2 + \mu X_k'^2) & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu X_k' \nu_k^2 \\ \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu \nu_k Y_k' & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \mu X_k' \nu_k^2 & \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k^2 \mu \nu_k^2 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} \nu_k^2 X_k' \left[X_k + \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \right)_k \right] + \mu \nu_k^2 Y_k'^2 \\ (\mu-1) \nu_k^3 X_k' Y_k' \\ \frac{\partial \Delta G}{\partial \theta} \mu \nu_k^3 Y_k' \end{pmatrix}$$

Cet algorithme ne permet pas de prendre ν en compte comme nous l'avons fait dans l'exemple traité, puisque la réponse \tilde{C}_k/θ n'est plus sous la forme d'une fraction rationnelle mais d'une somme de deux fractions rationnelles. Si on ramène cette somme à une seule fraction, les coefficients inconnus interviendront pas leurs produits d'une façon que l'on ne peut traiter.

L'application brute de cet algorithme a toujours conduit à des calculs divergents ici.

ANNEXE B

Optimisation des paramètres par la minimisation
d'une fonction de plusieurs variables

Notre problème consiste à lisser une série de points expérimentaux $z_k = X_k + jY_k$ par une fonction de transfert $(\tilde{C}_q/\tilde{\theta})(\nu)$ qui dépend de n paramètres δ_j (en l'occurrence λ, τ, a, e)

Pour cela, nous définissons une erreur

$$Err(\delta_j) = \sum_k P_k \left\{ \left[X_k - \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}(\nu_k) \right) \right]^2 + \mu \left[Y_k - \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{C}_q}{\tilde{\theta}}(\nu_k) \right) \right]^2 \right\}$$

P_k étant un poids éventuel qui dépend de la fréquence réduite, et μ un autre poids destiné à donner plus d'importance à la partie réelle ou à la partie imaginaire.

La méthode consistant à rechercher les racines du système

$$\frac{\partial Err(\delta_i)}{\partial \delta_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

conduit à des systèmes impossibles à résoudre directement.

Nous avons donc recherché le minimum de l'erreur par une méthode de gradients construite autour des formules 22 pages 2.14 de la [6]

1. Algorithme

1. Choix d'un point de départ P_i pour $i = 1$.

Nous avons suffisamment l'habitude des systèmes étudiés pour connaître des points de départ valables.

Pour une portance, nous utilisons :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda, = 0.04 \\ \tau, = 0.1 \\ a, = 0.2 \\ e, = 0 \end{array} \right\}$$

2. Calcul du gradient G_i de Err , analytiquement.
3. Calcul de la direction de recherche T_i qui n'est pas celle de plus grande pente $(-G_i)$, mais une direction améliorée qui tient compte des propriétés de courbure de la surface $\mathcal{J} = Err(\delta_1, \dots, \delta_n)$, courbure déduite des pas précédents :

$$T_i = -G_i + \frac{\|G_i\|^2}{\|G_{i-1}\|^2} T_{i-1}$$

si $i = 1$, on fait $T_i = -G_i$

Enfin, pour une meilleure conséquence, nous réinitialisons T_i à G_i toutes les 7 itérations.

4. Recherche de ε_m tel que l'erreur au point $P_i + \varepsilon T_i$, notée $F(\varepsilon)$ soit minimum.

On recherche donc $\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ soit

$$\sum_j (T_i)_j \left(\frac{\partial Err}{\partial \delta_j} \right)_{P_i + \varepsilon T_i} = 0$$

($(T_i)_j$ désigne la $j^{\text{ième}}$ composante de T_i)

- 4 a. Première approximation de ε_m :

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) - \frac{dF}{d\varepsilon}(0)}{\varepsilon_0} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_0 \text{ petit} \\ (\varepsilon_0 = 10^{-7} \text{ utilisé}) \end{array}$$

On choisit une valeur ε_2 telle que $\varepsilon_2/\varepsilon_0$ soit la plus grande puissance de 2 inférieure à $\varepsilon_1/\varepsilon_0$, valeur que l'on divisera ensuite par 2 pour avoir une meilleure sécurité du calcul (pour éviter de se trouver trop loin au delà du minimum recherché, dans une zone où Err risque de retrouver un comportement complexe) :

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2^{\text{INT}(\log_2 \varepsilon_1/\varepsilon_0)}$$

INT = fonction partie entière.

4 b. Recherche d'un encadrement $[\varepsilon_3, \varepsilon_4]$ de la solution :

A partir de la propriété $\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon=0) < 0$

- si $\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon=\varepsilon_2) > 0$ on divise ε_2 par 2
jusqu'à ce que $\frac{dF}{d\varepsilon} < 0$

- si $\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon=\varepsilon_2) < 0$ on double ε_1
jusqu'à ce que $\frac{dF}{d\varepsilon} > 0$

Dans les deux cas, on retient les deux dernières valeurs de ε_2 rencontrées comme bornes de l'intervalle $[\varepsilon_3, \varepsilon_4]$ cherché.

Le deuxième type de boucle (on double ε_1 ) risque de ne jamais s'arrêter si le minimum ε_m se trouve sur une direction asymptotique.

↳ Dans le cas de notre modélisation, certaines optimisations correspondent effectivement à une valeur ε_m infinie. Il n'y a alors rien à faire.

4 c. Réduction de l'intervalle $[\varepsilon_3, \varepsilon_4]$ en $[\varepsilon_5, \varepsilon_6]$

plus petit, par dichotomie, en se basant sur le signe de $\frac{dF}{d\varepsilon}$ pour choisir l'intervalle inférieur encadrant ε_m .

4 d. Interpolation linéaire sur $[\varepsilon_5, \varepsilon_6]$ pour trouver ε_7 , notre meilleure approximation de ε_m

$$\varepsilon_7 = \varepsilon_5 - \frac{\varepsilon_6 - \varepsilon_5}{\frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon_6) - \frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon_5)} \frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon_5)$$

5. Calcul du nouveau point $P_{i+1} = P_i + \varepsilon_7 T_i$

et retour en 2, sauf si la distance $P_i P_{i+1}$ est suffisamment faible, auquel cas on considère la convergence terminée ($P_i P_{i+1} \leq 10^{-5}$)

2. Résultats

Notre test d'arrêt de convergence est très sévère ($P_i P_{i+1} \leq 10^{-5}$) mais il n'y a pas de risque de divergence au voisinage du minimum, donc autant employer un test difficile qui assure mieux la proximité de la solution cherchée. D'autant que nos calculs sont effectués sur une machine de bureau et sont gratuits

Nombre d'itérations effectuées en moyenne :

	<u>erreur faible</u>	<u>erreur forte</u>
4 degrés de liberté	$\approx 20,25$	jusqu'à 80
3 " "	$\approx 10,12$	jusqu'à 25
2 " "	$\approx 8,10$	jusqu'à 15
1 " "	2	2

Ces résultats ne sont que des indications relatives aux cas traités.

3. Améliorations possibles

Les formules utilisées en 3 améliorent nettement la conséquence du système. D'autres formules proposant des directions de recherche meilleures, peuvent être utilisées (voir en particulier [7]).

A noter qu'à la [6], page 2.15, figurent aussi les formules 23 qui ont été utilisées également mais qui ont donné un mauvais résultat (il y figure probablement une erreur)

ANNEXE C

Comparaison du modèle avec l'expérience pour l'exemple qui
a servi d'illustration

Le tracé des grandes boucles calculées (figures 25, 26, 27) montre un désaccord avec les grandes boucles mesurées (figures 30, 31 et 32, lignes pointillées). Un résultat analogue avait été obtenu par Mlle Falchero [9].

1. Problème de la qualité des essais en soufflerie

La cause principale de ce désaccord semble provenir du fait que les essais grande amplitude et les essais petite amplitude, proviennent de deux campagnes distinctes, et ont été réalisées sur deux maquettes différentes du profil OA9.

La première campagne [5] portait sur la mesure de la réponse du profil à divers mouvements harmoniques, grande amplitude, mais aussi petite amplitude (à 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz). La maquette avait ensuite été détruite pour récupérer les capteurs pression. Le processus de modélisation demandant beaucoup plus de point de fréquence, une deuxième campagne [4] a eu lieu, qui a conduit au modèle du chapitre 6.

Une certaine dispersion apparaît bien sûr entre les deux campagnes, chaque fois que les mêmes quantités ont été mesurées :

. figure 28 : les courbes statiques sont un peu différentes, avec un décrochage qui apparaît un peu plus tôt à la deuxième campagne et un C_z décroché moins fort. Une troisième courbe statique, obtenue à Modane est également représentée, qui donne un résultat encore différent, avec un angle de décrochage particulièrement élevé.

. les mesures à petite amplitude de vibration communes (fréquences de 20, 30 et 40 Hz) montrent des variations également. On peut voir en particulier, grâce aux tableaux de la figure 29 que le maximum de la partie réelle qui se situe entre 15 et 20 Hz lors de la deuxième campagne serait plutôt vers 30 Hz à la première campagne, ce qui correspondrait à des valeurs de α un peu plus fortes.

D'une manière générale, les essais en soufflerie tendent à se disperser au moment du décrochage et dans la zone décrochée. Il suffit de peu de chose par exemple pour modifier un angle de décrochage, ce peu de chose pouvant être une irrégularité de profil, ou un effet tridimensionnel. Il est possible que les petites vibrations soient des mesures plus sûres que les courbes statiques, mais ce n'est pas évident.

Tout ceci est assez ennuyeux car les différences que l'on note sont significatives dans le modèle. L'utilisation des courbes statiques de la première campagne, couplée avec les coefficients déduits de la deuxième campagne améliore grandement nos boucles (voir figures 30,31 et 32).

Le modèle tel qu'on l'a défini schématise correctement le comportement d'une certaine maquette dans sa soufflerie. Les défauts du profil de la soufflerie, des traitements des mesures (l'âge du souffleur a-t-on l'habitude de dire..) sont aveuglément pris en compte dans nos équations, qui rendent compte du comportement grande amplitude du profil dans les mêmes conditions de mesure. Ces conditions sont choisies pour être les plus proches possibles de la réalité. Mais les souffleries sont des moyens d'essais complexes à maîtriser. Bien évidemment, ces problèmes sont ceux de tout modèle s'appuyant sur des essais soufflerie.

2. Application du modèle aux grandes boucles de la première campagne CEAT

Pour cette application, il est nécessaire de tenir compte de certains résultats obtenus à la première campagne, au moins des courbes statiques que le modèle doit en particulier prévoir.

Nous avons donc recherché pour ces courbes statiques des formules analogues à celles déjà utilisées :

$$C_{\frac{z}{s}} = C_{z_0} + p_0 \theta \quad \theta \leq \theta_1$$

$$C_{\frac{z}{s}} = C_{z_0} + (p_0 - p_1) \theta_1 + p_1 \theta + \kappa [e^{\nu(\theta - \theta_1)} - 1] \quad \theta \geq \theta_1$$

avec

$$C_{z_0} = 0.05$$

$$p_0 = 0.102 / \sqrt{1 - db^2}$$

$$p_1 = 0$$

$$\kappa = 4/3 M + 0.7$$

$$\nu = -0.5$$

$$\theta_1 = 16^\circ - 10 M$$

C'est cette unique correction qui a donné les figures 30, 31 et 32. Les résultats sont maintenant acceptables et auraient certainement même été un peu meilleurs si tous les essais avaient été faits à la suite les uns des autres, tout particulièrement aux très fortes incidences.

Nous avons regardé plus complètement l'effet des corrections sur une boucle à cheval sur l'incidence de décrochage. Se reporter à la figure 33.

Les conditions sont : Incidence : $11^\circ \pm 6$
 Mach : 0.30
 Fréquence : 4 Hz

1ère boucle : application brute du modèle obtenu à partir de la deuxième campagne. Le résultat n'est pas bon.

2ème boucle : prise en compte du retard de Beddoes qui prolonge la partie droite de la boucle, mais n'améliore pas globalement.

3ème boucle : utilisation du C_z statique de la première campagne. La boucle est maintenant bonne.

4ème boucle : modification de α pour tenir compte de la remarque apportée par les tableaux de la figure 29 :

$$= 0.1 + 0.65 \Delta C_z - 1 + \frac{1}{0.65 \Delta C_z + 1}$$

devient
$$= 0.15 + 0.65 \Delta C_z - 1 + \frac{1}{0.65 \Delta C_z - 1}$$

Pour ne pas changer le comportement de l'aérodynamique, on augmente α également, de manière à garder la quantité α/α_c sensiblement constante (ce qui maintient un amortissement un peu inférieur à l'amortissement critique en $\Delta C_z = 0$ ($\alpha_c = \sqrt{4r}$))

$$\alpha = 0.15 - 0.45 \Delta C_z^2 \text{ devient } \alpha = 0.25 - 0.45 \Delta C_z^2$$

La réponse de la deuxième équation est un peu améliorée dans la zone où l'écoulement vient de se raccrocher

5ème boucle : pour avoir une boucle parfaite, on augmente un peu le retard ΔZ en prenant 8 au lieu de la valeur 5 proposée par Beddoes .

6ème boucle : comme les résultats expérimentaux dont nous disposons sont coupés à partir de la 4ème harmonique comprise, on fait subir le même sort à notre réponse. La modification apportée par ce filtrage est assez importante.

Le résultat final est excellent, sans que l'on puisse conclure bien sûr que ces manipulations soient nécessaires. Elles détérioreraient peut-être d'autres boucles.

Sur tous ces résultats, on remarque à chaque fois que nos boucles sont toujours décalées vers le bas. Est-ce un problème de C_z statique encore ? ou un effet de la seconde équation n'apparaissant pas en réalité ? Aux fréquences réduites exagérées (n'oublions pas les limitations en fréquence amplitude du modèle), les boucles calculées sont très fortement décentrées vers le bas. Cela se produit d'ailleurs parfois pour $M = 0.12$ à une fréquence de 8 Hz où la fréquence réduite de 0.25, élevée du fait du Mach très faible, est trop grande pour une amplitude de $\pm 6^\circ$.

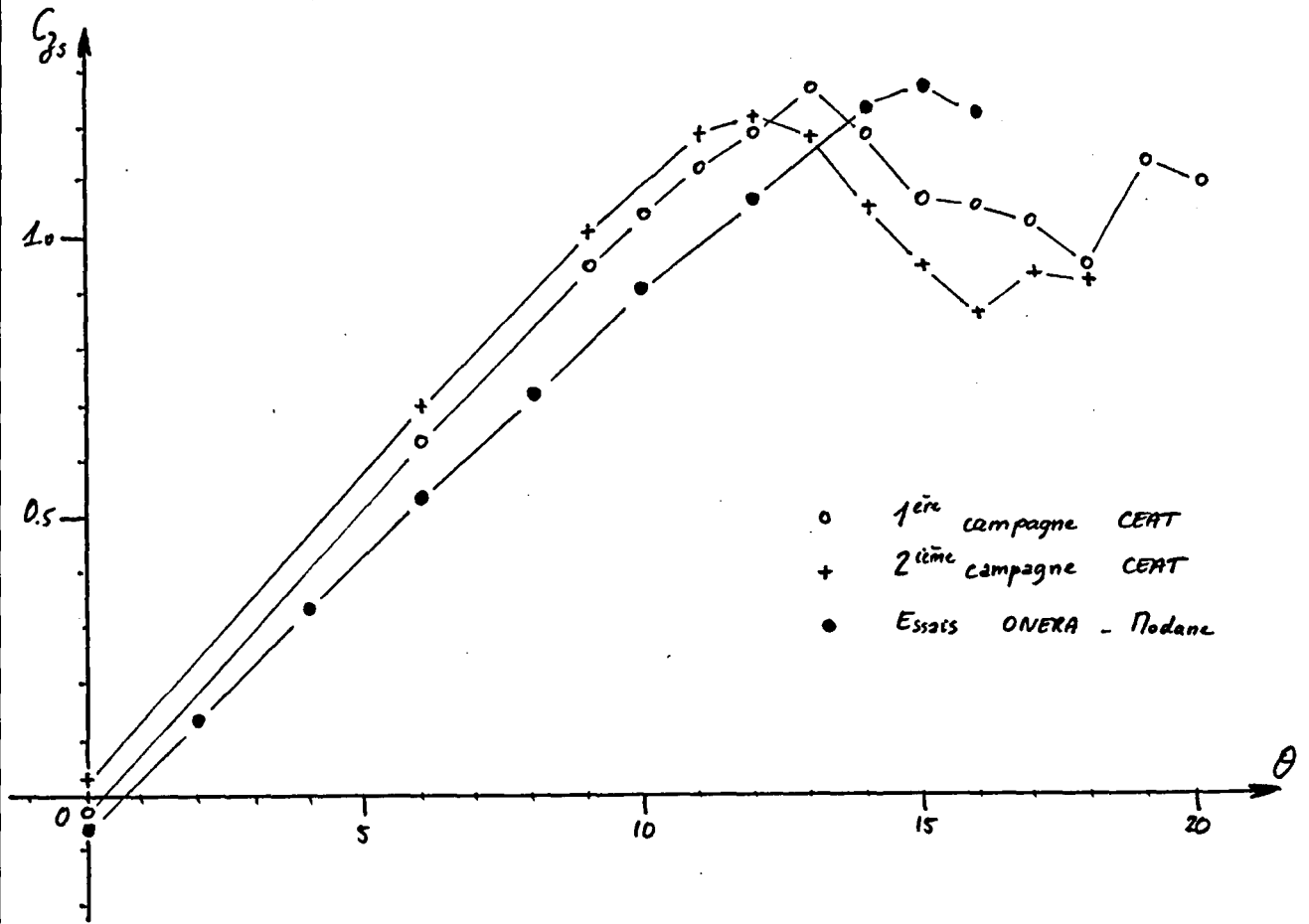


Fig 28 - Différentes mesures du G_s à Mach = 0.30

Mach = 0.12 : Maximum à trop faible fréquence pour conclure

Mach = 0.20

Mach = 0.30

	2 ^{ème} campagne CEAT	Mesures de la 1 ^{ère} campagne CEAT		
		20 Hz	30 Hz	40 Hz
13°	20 Hz	0.037	0.067	0.061
14°	15 Hz	0.037	0.067	0.055
15°	15 Hz	0.040	0.059	0.046
16°	15 Hz	0.121	0.100	0.065
17°	20 Hz	0.106	0.117	0.069

	2 ^{ème} campagne CEAT	Mesures de la 1 ^{ère} campagne CEAT		
		20 Hz	30 Hz	40 Hz
13°	20 Hz	0.055	0.082	0.085
14°	15 Hz	0.076	0.071	0.058
15°	20 Hz	0.092	0.121	0.080
16°	20 Hz	0.062	0.152	0.105
17°	20 Hz	0.085	0.136	0.123

Fig 29 - Position du maximum de la partie réelle de $\tilde{C}_z/\tilde{\theta}$

Mach = 0.12
Fréquence = 4 Hz

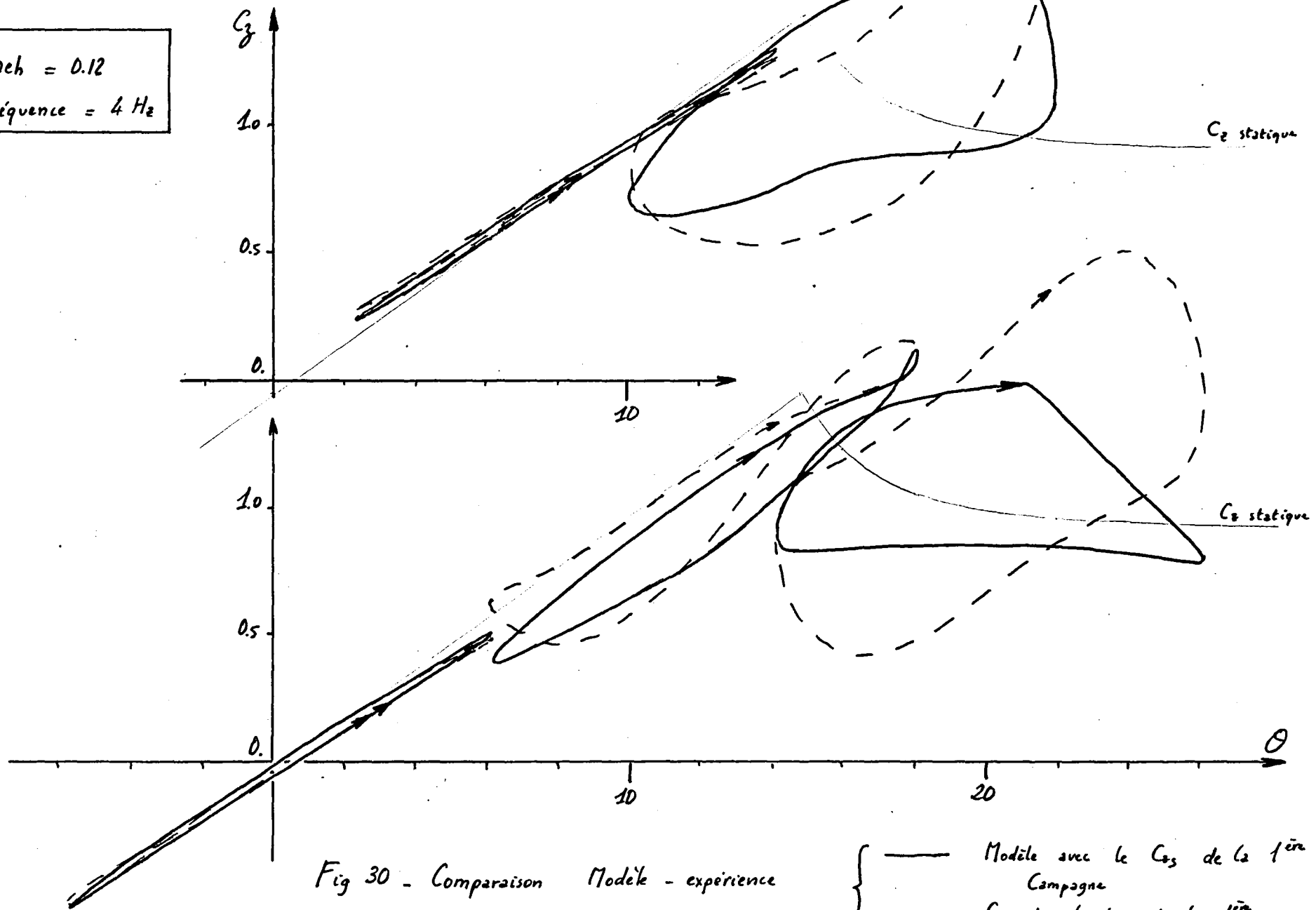


Fig 30 - Comparaison Modèle - expérience

- Modèle avec le C_{z_s} de la 1^{ère} Campagne
- - - Grandes boucles de la 1^{ère} campagne

Mach = 0.30
Fréquence = 4 Hz

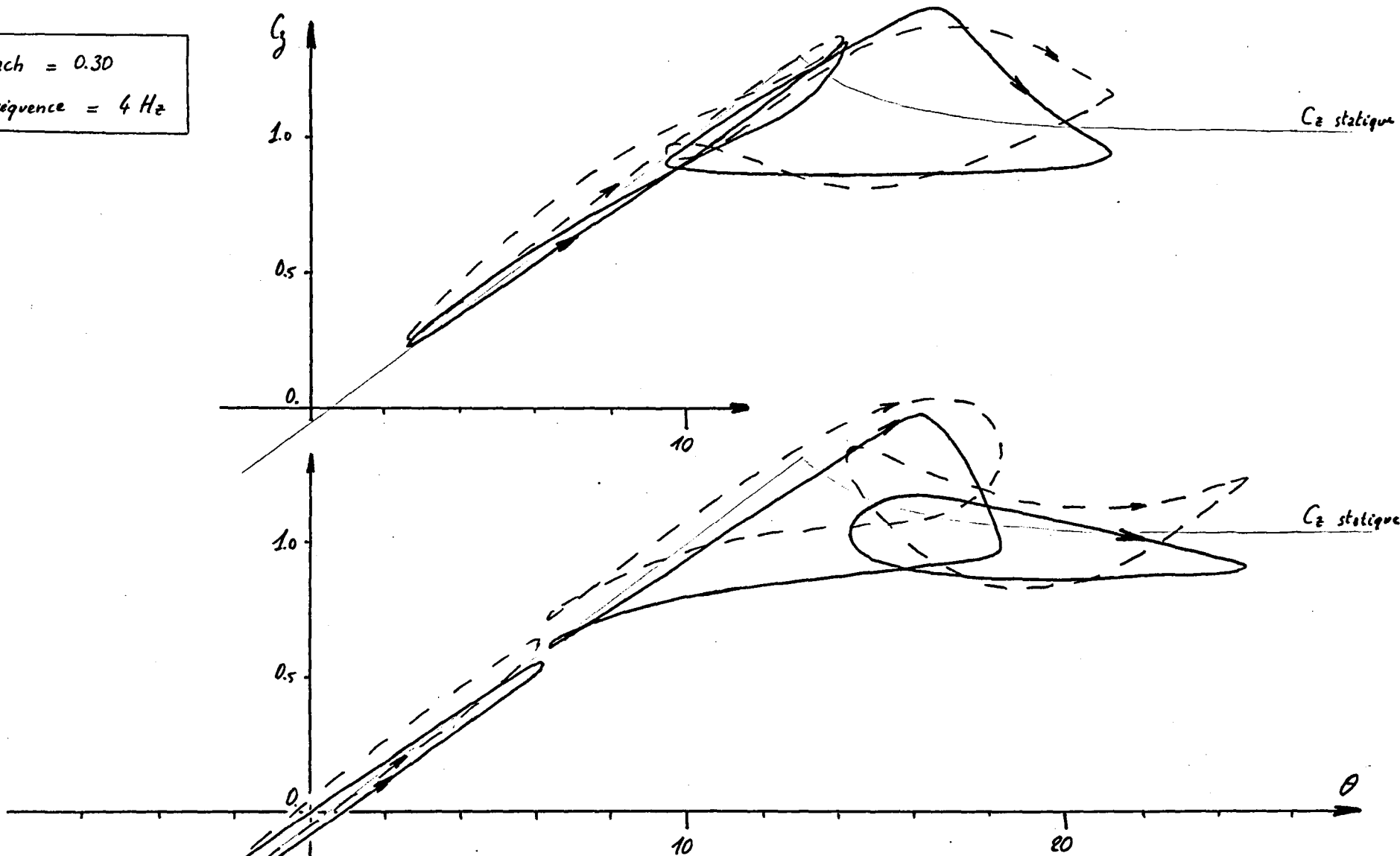


Fig 31 - Comparaison Modèle - expérience

——— Modèle utilisant le C_{z_s} de la 1^{ère} campagne
 - - - Grandes boucles de la 1^{ère} campagne

Mach = 0.30
Fréquence = 8 Hz

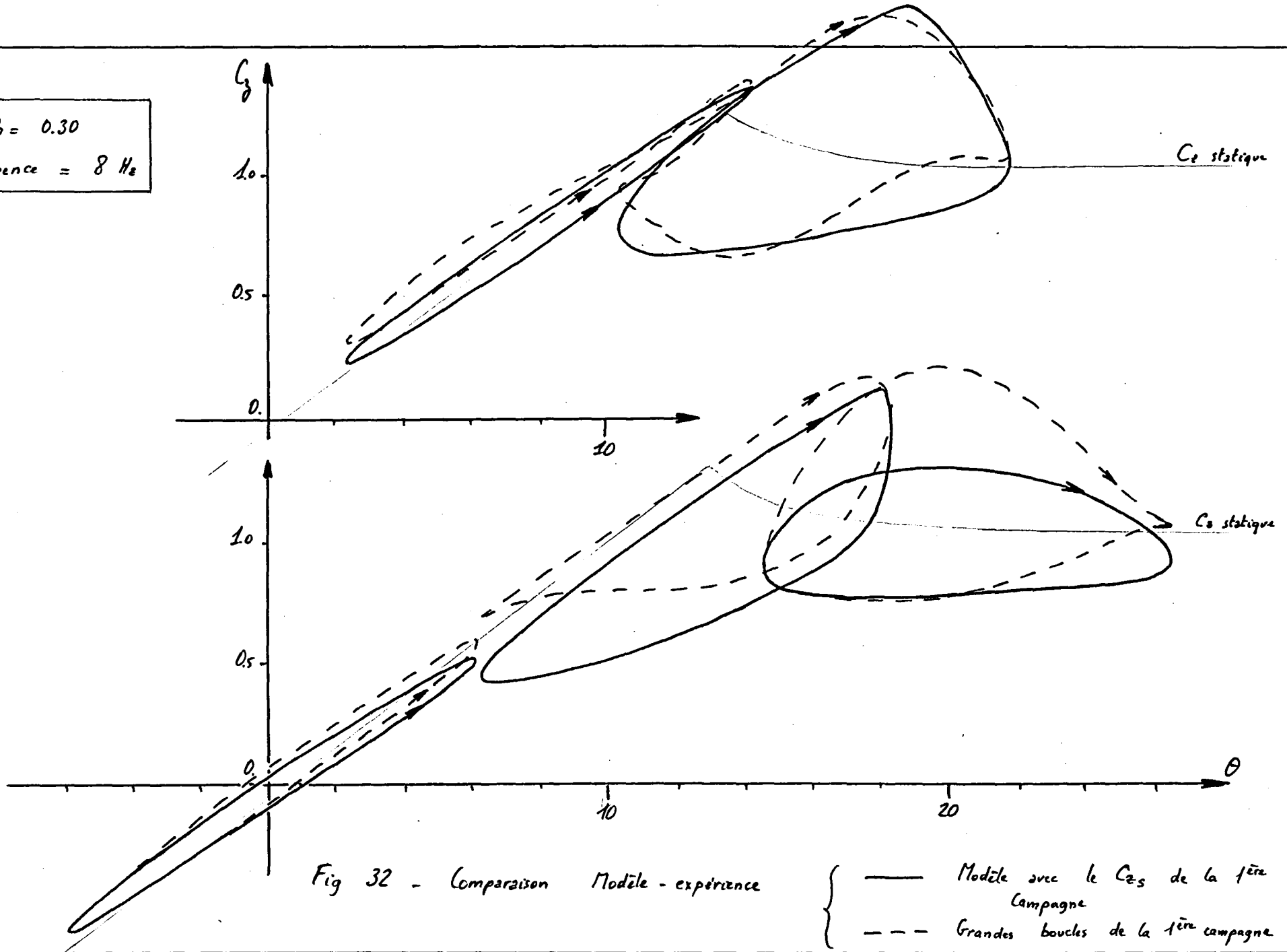


Fig 32 - Comparaison Modèle - expérience

- Modèle avec le C_{es} de la 1ère Campagne
- - - Grandes boucles de la 1ère campagne

Fig : 33

Boucle $\left\{ \begin{array}{l} 11^\circ \pm 6^\circ \\ \text{Mach} = 0.30 \\ \text{Fréquence} = 4 \text{ Hz} \end{array} \right.$

--- 1^{ère} campagne
 — Calcul

• Application brute du modèle obtenu à partir de la 2^{ème} campagne

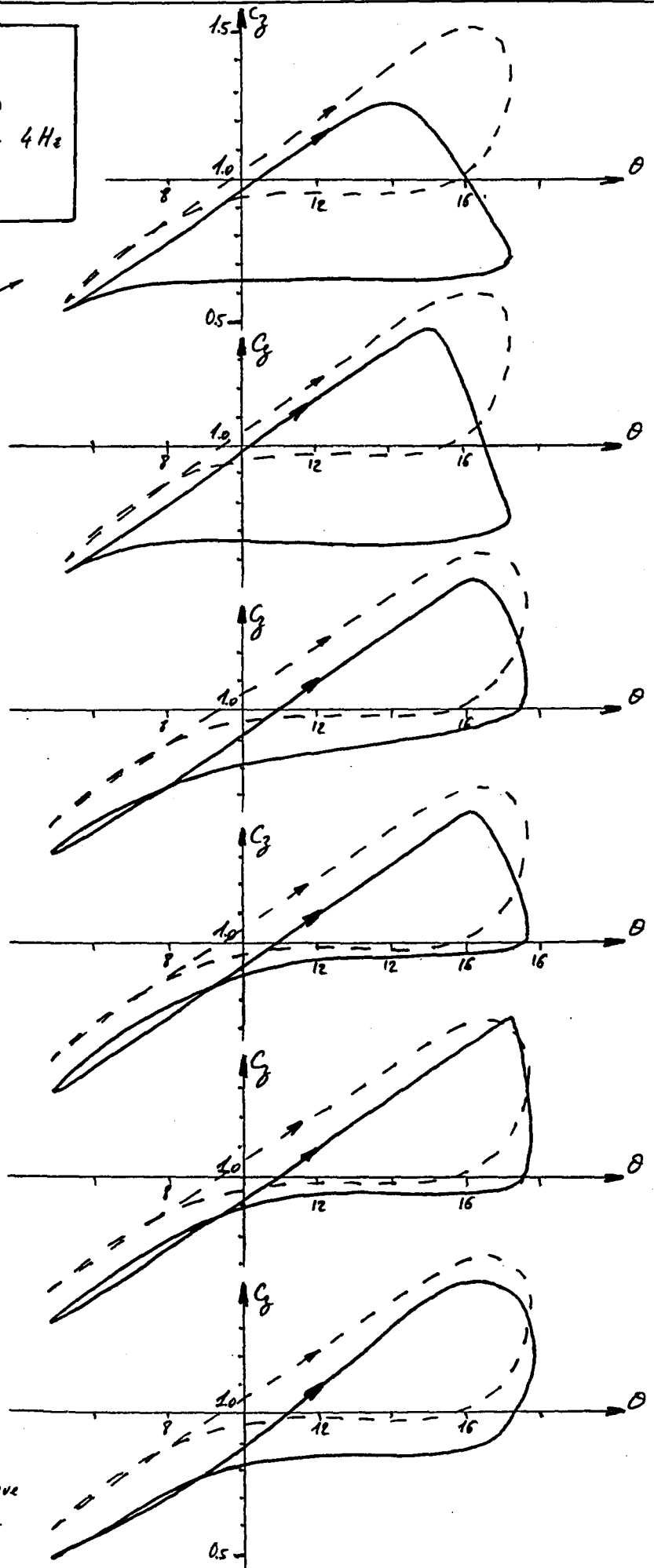
• Prise en compte du retard de Beddoes : $\Delta z = 5$

• Utilisation du C_z statique de la première campagne

• Correction de retard r_z

• Essai d'un retard plus fort ($\Delta z = 8$)

• Filtrage à partir du 4^{ème} Harmonique (les résultats expérimentaux sont ainsi filtrés)



1201

End of Document