Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Г.М.Гречко, В.А.Сарычев, В.П. Легостаев,
В.В.Сазонов, И.Н. Гансвинд

ГРАВИТАЦИОННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА "САЛЮТ 6" – "СОЮЗ"

Препринт № 18 за 1983г.

Москва

Академия наук СССР

Ордена Ленина
Институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша

Г.М.Гречко, В.А.Сарычев, В.П.Легостаев,
В.В.Сазонов, И.Н.Гансвинд

ГРАВИТАЦИОННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА "САЛЮТ 6" - "СОЮЗ"

Москва, 1983 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Предложена простая математическая модель движения орбитального комплекса "Салют 6" - "Союз" относительно центра масс в режиме одноосной гравитационной ориентации. С помощью этой модели проведена обработка результатов измерений параметров движения орбитального комплекса, выполненных во время использования указанного режима.

Восстановлены некоторые реальные движения спутника и найдены его аэродинамические параметры. Получены оценки точности результатов измерений и оценка точности используемой математической модели.

A B S T R A C T

A simple mathematical model is proposed for the Salyut 6-Soyuz orbital complex motion with respect to the center of mass under the one-axis gravity-gradient orientation regime. This model was used for processing the measurements of the orbital complex motion parameters when the above orientation region was implemented .

Some actual satellite motions are simulated and the satellite's aerodynamic parameters are determined. Estimates are obtained for the accuracy of measurements as well as that of the mathematical model.

I. Введение. Орбитальный комплекс "Салют 6" - "Союз" (далее для краткости иногда называемый спутником) представляет собой сильно вытянутую конструкцию с большими поперечными моментами инерции. С учетом этого обстоятельства космонавты Г.М.Гречко и Ю.В.Романенко предложили проводить пассивный полет спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации, направив его продольную ось вдоль местной вертикали [I]. Необходимые начальные условия движения по угловым отклонениям продольной оси от местной вертикали и по угловой скорости они получали путем ручного управления с использованием индикатора углового положения — широкоугольного визира (поле зрения 190^0, ось визира перпендикулярна продольной оси спутника) и индикатора угловых скоростей с цифровой индикацией. Управляющие моменты создавались реактивными микродвигателями системы ориентации.

В начале использования режима гравитационной ориентации алгоритм построения начальных условий движения в этом режиме состоял в следующем. Спутник ориентировали в положение "на разгон" (продольная ось спутника параллельна касательной к орбите, переходной отсек направлен вперед по полету) так, чтобы изображение Земли было в центре визира. Затем спутник разворачивали в плоскости орбиты на 90^0 переходным отсеком к Земле, т.е. совмещали продольную ось спутника с местной вертикалью. Несимметричная солнечная батарея при этом располагалась в плоскости орбиты вперед по полету. К концу разворота проекция угловой скорости спутника на нормаль к плоскости орбиты снижалась от максимальной (0.3^0/с) до орбитальной (0.066^0/с на высоте 340км), проекция угловой скорости на плоскость орбиты приводилась в нуль. Эти значения контролировались по индикатору угловых скоростей, а требуемое положение спутника — по угловому расстоянию от центра визира до края изображения Земли (18.3^0 на высоте 340 км). В результате спутник без расхода топлива сохранял заданную ориентацию вдоль местной вертикали в течение нескольких суток. Точность ориентации составляла от 1^0–3^0 в начале режима до 10^0–15^0 в конце.

Режим гравитационной ориентации оказался очень удобным для проведения разного рода научных исследований. Были случаи когда спутник находился в состоянии гравитационной ориентации примерно неделю — от одного динамического режима до другого.

Непосредственное экспериментальное исследование возмущенного движения спутника в режиме гравитационной ориентации привело космонавтов к заключению, что кроме неизбежных ошибок в построении начальных условий ориентированного движения существенное дестабилизирующее влияние на этот режим оказывает аэродинамический момент. Этот момент обусловлен аэродинамической асимметрией спутника в целом и, в особенности, асимметрией панелей солнечных батарей. В частности, из-за неустойчивости переднего расположения несимметричной солнечной батареи наблюдалось вращение спутника вокруг продольной оси [x)].

Анализ наблюдений возмущенного движения позволил Г.М.Гречко разработать более простой и экономичный алгоритм приведения спутника в режим гравитационной ориентации, обеспечивающий также большую точность построения начальных условий. Начиная ориентацию, космонавты уже не приводили спутник из некоторого случайного положения, оставшегося после предыдущего динамического режима, в промежуточное – "на разгон". С угловыми скоростями $\lesssim 0.3^o/c$ они кратчайшими разворотами приводили изображение Земли в визире в требуемое положение; затем снижали угловую скорость спутника, добиваясь остановки изображения в этом положении и следя, чтобы векторная сумма угловых скоростей относительно поперечных осей равнялась орбитальной, а угловая скорость относительно продольной оси равнялась нулю. Ошибки в подборе угловых скоростей относительно поперечных осей неизбежно вызывают уходы спутника из установленного положения. Поэтому необходимо окончательное уточнение ориентации для устранения таких уходов.

Указанное уточнение (оно проводилось и при первом способе построения ориентации и, следовательно, не вело к дополнительному расходу топлива) осуществлялось двумя-тремя последовательными приближениями по отклонениям углов спутника от их номиналь-

---

[x)] Это вращение можно устранить, приводя спутник в режим гравитационной ориентации таким образом, чтобы несимметричная солнечная батарея располагалась в плоскости орбиты назад по полету. Указанную начальную ориентацию спутника использовали впоследствии Л.И.Попов и В.В.Рюмин. Для этого они производили разворот спутника в плоскости орбиты из положения "на торможение" (переходной отсек направлен назад по полету).

ных значений в режиме гравитационной ориентации и временам накоплений этих отклонений. Минимальными импульсами отклонения выбирались до нуля и вносились поправки в угловые скорости спутника, компенсирующие средние скорости изменения отклонений.

Отклонения углов измерялись с помощью визира, не предназначенного для таких измерений и не имеющего соответствующих делений, повышающих точность отсчета. Поэтому Г.М.Гречко предложил ввести в поле зрения визира маску, которая позволила упростить процесс приведения спутника в режим гравитационной ориентации и повысить точность обеспечения требуемых начальных условий по угловым отклонениям. Маска была изготовлена и доставлена на "Салют 6". По методикам Г.М.Гречко и с помощью упомянутой выше маски режим гравитационной ориентации уверенно использовался всеми последующими экипажами орбитального комплекса "Салют 6" -"Союз".

Некоторые вопросы динамики режима гравитационной ориентации орбитального комплекса были исследованы в [2,3]. В этих работах спутник считался твердым телом, имеющим форму цилиндра с тремя прикрепленными к нему пластинами — солнечными батареями (рис. I). Орбита центра масс спутника предполагалась круговой, и учитывалось действие на спутник гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов. В [2,3] для различных способов введения малого параметра в виде формальных рядов были построены интегральные поверхности уравнений движения спутника, описывающие его колебания и вращения вокруг продольной оси, направленной приблизительно вдоль местной вертикали. Такие движения предлагалось считать номинальными невозмущенными движениями спутника в режиме гравитационной ориентации. Было проведено численное исследование указанных интегральных поверхностей и возмущенных движений в их окрестности.

В данной работе уравнения движения спутника, выведенные в [2,3], используются для обработки измерений некоторых параметров движения, выполненных Г.М.Гречко на борту орбитального комплекса. Всего было проведено три ряда измерений. Два из них относятся к движению спутника в режиме гравитационной ориентации и один — к свободному (неориентированному) движению. Целью этих измерений было показать, что в режиме гравитационной ориентации микроускорения, действующие на борту спутника, минимальны. Вопросы, связанные с исследованием микроускорений, в данной работе не рассматриваются, а измерения используются для разного рода оценок. В результате обработки этих измерений, проведенной разными способами, восстановлены некоторые реальные движения спутника и найдены его аэродинамические параметры. Получены также оценки точности результатов измерений и оценка точности принятых в работе уравнений движения спутника.

2. Уравнения движения. Спутник будем считать твердым телом, центр масс которого движется по круговой орбите вокруг Земли. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем две правые декартовы системы координат.

$Ox_1x_2x_3$ — система координат, жестко связанная со спутником. Точка O — центр масс спутника; оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 — главные центральные оси инерции спутника.

$OX_1X_2X_3$ — орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса вектора точки O относительно центра Земли, ось OX_1 направлена по касательной к орбите в сторону движения спутника.

Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ зададим с помощью углов δ, β, γ (рис. 2). Соответствующая матрица перехода имеет вид

	x_1	x_2	x_3
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$a_{11} = -\sin\delta\cos\beta,$$
$$a_{12} = \cos\delta\sin\gamma + \sin\delta\sin\beta\cos\gamma,$$
$$a_{13} = \cos\delta\cos\gamma - \sin\delta\sin\beta\sin\gamma,$$

$$a_{21} = \sin\beta, \qquad a_{31} = -\cos\delta\cos\beta,$$
$$a_{22} = \cos\beta\cos\gamma, \qquad a_{32} = -\sin\delta\sin\gamma + \cos\delta\sin\beta\cos\gamma,$$
$$a_{23} = -\cos\beta\sin\gamma; \qquad a_{33} = -\sin\delta\cos\gamma - \cos\delta\sin\beta\sin\gamma.$$

Как нетрудно видеть, углы δ и β задают положение оси Ox_1 в орбитальной системе координат, угол γ задает поворот спутника вокруг этой оси.

Введем обозначения: (ω_1, ω_2, ω_3) – абсолютная угловая скорость спутника (здесь и далее компоненты векторов указываются в системе координат $Ox_1x_2x_3$); A, B, C – моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3; (M_1, M_2, M_3) – вычисленный относительно точки O главный момент внешних сил, приложенных к спутнику; $\omega_0 = const > 0$ – угловая скорость орбитального движения; t – время. Движение спутника относительно центра масс описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\gamma}{dt} = \omega_1 - tg\beta(\omega_2\cos\gamma - \omega_3\sin\gamma),\\
&\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\cos\beta}(\omega_2\cos\gamma - \omega_3\sin\gamma) - \omega_0,\\
&\frac{d\beta}{dt} = \omega_2\sin\gamma + \omega_3\cos\gamma,\\
&A\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)\omega_2\omega_3 = M_1,\\
&B\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)\omega_1\omega_3 = M_2,\\
&C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\omega_1\omega_2 = M_3.
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

Из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать только гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты. Компоненты гравитационного момента имеют вид

$$
M_{g1} = 3\omega_0^2(C-B)a_{32}a_{33},\; M_{g2} = 3\omega_0^2(A-C)a_{33}a_{31},
$$
$$
M_{g3} = 3\omega_0^2(B-A)a_{31}a_{32}.
$$

При вычислении восстанавливающего аэродинамического момента будем считать, что спутник имеет форму цилиндра с тремя прикрепленными к нему пластинами – солнечными батареями (рис. I). Радиус цилиндра – R, высота – ℓ. Ось цилиндра совпадает с осью Ox_1, а его геометрический центр имеет координаты ($d_1, 0, 0$). Две солнечные батареи лежат в плоскости Ox_1x_3 (рис. I) и одна–в плоскости Ox_1x_2. Площадь каждой солнечной батареи равна S. Геометрический центр каждой батареи удален на расстояние b от оси Ox_1, а его проекция на эту ось имеет координату d_2. Относительно взаимодействия спутника с атмосферой будем считать следующее: I) атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве; 2) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника; 3) сопротивление атмосферы не влияет на эволюцию орбиты. При сделанных предположениях для положений спутника, в которых ось Ox_1 приблизительно параллельна оси OX_3 $(\sin\delta\approx 0, \sin\beta\approx 0)$, компоненты аэродинамического момента имеют вид [2,3]

$$
\begin{aligned}
M_{a1} &= \tfrac{1}{2} c_x \rho V^2 S b F(a_{12}\tau_1 - a_{13}\tau_2),\\
M_{a2} &= \tfrac{1}{2} c_x \rho V^2 [2Rl a_{13} + SF(a_{13} d_2 - a_{11}\tau_1 b)],\\
M_{a3} &= -\tfrac{1}{2} c_x \rho V^2 [2Rl a_{12} + SF(a_{12} d_2 - a_{11}\tau_2 b)].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь

$$
F = \begin{cases} |a_{12}| + |a_{13}| & \text{при } |a_{12}| \le |a_{13}|, \\ 2|a_{12}| & \text{при } |a_{12}| > |a_{13}|; \end{cases}
$$

$$
\tau_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < a_{12}/a_{13} \le 1, \\ -1 & \text{при } -1 \le a_{12}/a_{13} \le 0, \\ 0 & \text{при } |a_{12}| > |a_{13}|; \end{cases}
$$

$$
\tau_2 = |\tau_1|;
$$

c_x – коэффициент аэродинамического сопротивления; ρ – плотность набегающего на спутник воздушного потока, V – абсолютная скорость центра масс спутника. Полагаем, что $\rho = const$. В рамках принятой модели формулы (2) точны только при $\sin\delta = \sin\beta = 0$. Если же эти соотношения не выполнены, то в (2) имеется погрешность, обусловленная неточным вычислением площади затенения солнечных батарей и площади части поверхности цилиндра, омываемой воздушным потоком. В режиме гравитационной ориентации абсолютная величина углов δ и β, как правило, не превосходит нескольких градусов, поэтому такая погрешность не превышает погрешности самой модели. Более точная модель взаимодействия спутника с атмосферой должна учитывать разного рода вариации плотности атмосферы ρ и изменение ориентации солнечных батарей относительно корпуса спутника. Однако, с одной стороны, учет этих факторов требует введения в выражения для аэродинамического момента большего числа трудно оцениваемых параметров, с другой стороны, уже формулы (2) позволяют выявить основные свойства режима гравитационной ориентации [2,3].

С помощью безразмерных величин

$$\Omega_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}\ (i=1,2,3),\ \tau=\omega_0 t,\ \lambda=\frac{A}{C},\ \mu=\frac{B-C}{A};$$

$$\mu_1=\frac{c_x\rho V^2 S b}{2A\omega_0^2},\ \mu_2=\frac{c_x\rho V^2 R\ell d_1}{A\omega_0^2},\ \mu_3=\frac{c_x\rho V^2 S d_2}{2A\omega_0^2}$$

уравнения (I) при $M_i = M_{gi} + M_{ai}\ (i=1,2,3)$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
&\dot\gamma = \Omega_1 - \operatorname{tg}\beta\,(\Omega_2\cos\gamma - \Omega_3\sin\gamma),\\
&\dot\delta = \frac{1}{\cos\beta}(\Omega_2\cos\gamma - \Omega_3\sin\gamma) - 1,\\
&\dot\beta = \Omega_2\sin\gamma + \Omega_3\cos\gamma,\\
&\dot\Omega_1 = \mu(\Omega_2\Omega_3 - 3a_{32}a_{33}) + \mu_1 F(a_{12}\tau_1 - a_{13}\tau_2),\\
&\dot\Omega_2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\Omega_1\Omega_3 - 3a_{31}a_{33}) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}[(\mu_2+\mu_3 F)a_{13} - \mu_1 F a_{11}\tau_1],\\
&\dot\Omega_3 = -(1-\lambda+\lambda\mu)(\Omega_1\Omega_2 - 3a_{31}a_{32}) - \lambda[(\mu_2+\mu_3 F)a_{12} - \mu_1 F a_{11}\tau_2].
\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по τ. Правые части уравнений (3) не содержат τ и 2π-периодически зависят от γ.

Полная энергия движения спутника вокруг центра масс, отнесенная к $C\omega_0^2$, имеет вид [3]

$$E = \frac{\lambda}{2}(\Omega_1^2 - 2\Omega_1 a_{21} + 3a_{31}^2) + \frac{1+\lambda\mu}{2}(\Omega_2^2 - 2\Omega_2 a_{22} + 3a_{32}^2) + \frac{1}{2}(\Omega_3^2 - 2\Omega_3 a_{23} + 3a_{33}^2) + \frac{\lambda\mu_1 F}{2}(a_{12}\tau_2 + a_{13}\tau_1) + \lambda\mu_2 a_{11}.$$

Производная этой величины по τ в силу уравнений (3) определяется формулой

$$\dot E = \lambda\mu_3 F[a_{13}(\Omega_2 - a_{22}) - a_{12}(\Omega_3 - a_{23})].\tag{4}$$

Уравнения (3) содержат пять параметров: λ, μ, μ_1, μ_2, μ_3. Для оценки их значений будем считать, что описанная выше модель орбитального комплекса "Салют 6 – Союз" имеет следующие характеристики [2] :

$A = 51600$ кгм^2, $B = 967700$ кгм^2, $C = 964100$ кгм^2,

$S = 20$ м^2, $b = 4$ м, $R = 2$ м, $\ell = 15$ м, $d_1 = 1$ м, $d_2 = 0{,}5$ м.

Параметры орбиты возьмем от 12 февраля 1978 года: высота – 340 км, период – 91.2 мин. В этом случае $\omega_0 = 0.00115$ с$^{-1}$ и согласно [4] $\rho = 1.104 \cdot 10^{-11}$ кг/м^3. Положим $c_x = 2$. Тогда в системе (3)

$$\lambda = 0.0535, \quad \mu = 0.0697, \mu_1 = 0.772, \mu_2 = 0.579, \mu_3 = 0.097. \quad (5)$$

Точность определения этих параметров неодинакова. Значения μ и λ известны довольно точно, значения μ_1, μ_2, μ_3 – весьма приближенно. Погрешность в определении μ_1, μ_2, μ_3 обусловлена неточным знанием ρ, d_1, d_2, c_x.

3. Одноосная гравитационная ориентация. Режимом одноосной гравитационной ориентации спутника будем называть такое его движение, в котором угол θ между осями Ox_1 и $(-OX_3)$ (рис. 2) не превосходит некоторого значения Δ. Например, можно взять $\Delta = 10^0$. В зависимости от значений параметров спутника возможны разные подходы к реализации режима гравитационной ориентации и его исследованию. В работах [2,3] такое исследование проводилось методами малого параметра. В [2] малыми параметрами считались μ, μ_1, μ_2 и μ_3, в [3] в качестве малого параметра было взято λ. Первый из указанных способов введения малого параметра позволяет провести исследование проще чем второй способ, но он пригоден только для высоких орбит (в [2] рассматривалась орбита с высотой ~ 400 км). Второй способ пригоден для любой орбиты – возможность его применения определяется только распределением масс спутника. Для значений параметров (5) более подходящим является второй способ, поэтому ниже приводятся некоторые результаты [3], поясняющие динамику режима одноосной гравитационной ориентации спутника в случае $\lambda \ll 1$.

Вместо переменных Ω_2, Ω_3 введем переменные

$$w_2 = \Omega_2 \cos\gamma - \Omega_3 \sin\gamma, \quad w_3 = \Omega_2 \sin\gamma + \Omega_3 \cos\gamma.$$

Величины Ω_1, w_2, w_3 представляют собой отнесенные к ω_0 проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси полусвязанной системы координат, получающейся из системы $Ox_1x_2x_3$ при $\gamma = 0$. В новых переменных уравнения (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\dot\gamma = \Omega_1 - w_2 \,\mathrm{tg}\beta, \qquad \dot\Omega_1 = R_1, \\ &\dot\delta = \frac{w_2}{\cos\beta} - 1, \qquad \dot\beta = w_3, \qquad\qquad (6) \\ &\dot w_2 = w_2 w_3 \,\mathrm{tg}\beta - 3\sin\delta\cos\delta\cos\beta + \lambda R_\delta, \\ &\dot w_3 = -w_2^2 \,\mathrm{tg}\beta - 3\cos^2\delta \sin\beta\cos\beta + \lambda R_\beta. \end{aligned}$$

Здесь

$$R_\gamma = R_2\cos\gamma - R_3\sin\gamma, \quad R_\beta = R_2\sin\gamma + R_3\cos\gamma,$$

$$R_1 = \mu(\Omega_2\Omega_3 - 3a_{32}a_{33}) + \mu_1 F(a_{12}\tau_1 - a_{13}\tau_2),$$

$$R_2 = -\frac{1+\mu}{1+\lambda\mu}(\Omega_1\Omega_3 - 3a_{31}a_{33}) + \frac{1}{1+\lambda\mu}[(\mu_2+\mu_3 F)a_{13} - \mu_1 F a_{11}\tau_1],$$

$$R_3 = (1-\mu)(\Omega_1\Omega_2 - 3a_{31}a_{32}) - (\mu_2+\mu_3 F)a_{12} + \mu_1 F a_{11}\tau_2,$$

причем переменные Ω_2, Ω_3 должны быть выражены через w_2, w_3.

При $\lambda = 0$, т.е. для спутника, бесконечно вытянутого вдоль оси Ox_1, система (6) допускает семейство частных решений, в котором

$$\delta = \beta = w_3 = 0, \quad w_2 = 1, \tag{7}$$

а γ и Ω_1 определяются уравнениями

$$\dot\gamma = \Omega_1, \quad \dot\Omega_1 = -\mu\sin\gamma\cos\gamma - \mu_1 G(\gamma). \tag{8}$$

Здесь

$$G(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{при } |tg\gamma| \geq 1, \\ \cos 2\gamma \, \mathrm{sign}(\cos\gamma) & \text{при } |tg\gamma| < 1. \end{cases}$$

Система (8) допускает первый интеграл

$$h(\gamma, \Omega_1) \equiv \frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \mu\sin^2\gamma) + \mu_1\int_0^\gamma G(\gamma)d\gamma = const, \tag{9}$$

с помощью которого был построен ее фазовый портрет (рис. 3). Система (8) имеет стационарные решения

$$\begin{aligned} &\gamma = \bar\gamma_1 \approx \frac{5\pi}{4}, \quad \Omega_1 = 0; \\ &\gamma = \bar\gamma_2 = 3\pi - \bar\gamma_1 \approx \frac{7\pi}{4}, \quad \Omega_1 = 0; \\ &\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega_1 = 0; \\ &\gamma = \frac{3\pi}{2}, \quad \Omega_1 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Первые два из них устойчивы, а остальные неустойчивы (см. рис.3).

Движения вида (7), (8) можно использовать в качестве номинального невозмущенного движения бесконечно вытянутого спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации. В этом движении $\theta = 0$, т.е. ось Ox_1 направлена точно в центр Земли. При $\lambda \neq 0$ система (6) не имеет решений (7), (8), однако, если $\lambda \ll 1$, то в виде формальных рядов по степеням λ можно построить ее интегральные поверхности, близкие семейству таких решений [x]. Движения, принадлежащие этим интегральным поверхностям, будем считать номинальными невозмущенными движениями вытянутого спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации.

Для построения указанных интегральных поверхностей сделаем некоторые вспомогательные преобразования. Существует [3] замена переменных

$$\gamma = f_1(\psi, a), \quad \Omega_1 = f_2(\psi, a), \tag{II}$$

приводящая систему (8) к виду

$$\dot{\psi} = \omega(a), \quad \dot{a} = 0 \quad (\omega(a) > 0)$$

и удовлетворяющая условиям $f_1(\psi+2\pi, a) \equiv f_1(\psi, a) \ (mod\, 2\pi)$, $f_2(\psi+2\pi, a) = f_2(\psi, a)$. Эта замена строится по-разному в каждой из областей I–У фазовой плоскости $(\gamma (mod\, 2\pi), \Omega_1)$ (рис. 4). В области I $f_1(\psi+2\pi, a) = f_1(\psi, a) + 2\pi$, в области II $f_1(\psi+2\pi, a) = f_1(\psi, a) - 2\pi$, в областях Ш–У $f_1(\psi+2\pi, a) = f_1(\psi, a)$. Фиксируем одну из областей I–У и сделаем в ней замену переменных (II) в уравнениях (6). В результате эти уравнения примут вид

$$\begin{gathered}
\dot{\psi} = \omega(a) + F_1(\psi, a, \delta, \beta, w_2, w_3), \quad \dot{a} = F_2(\psi, a, \delta, \beta, w_2, w_3), \\
\dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos\beta} - 1, \quad \dot{\beta} = w_3, \\
\dot{w}_2 = w_2 w_3 \operatorname{tg}\beta - 3\sin\delta\cos\delta\cos\beta + \lambda R_\delta(\psi, a, \delta, \beta, w_2, w_3, \lambda), \\
\dot{w}_3 = -w_2^2 \operatorname{tg}\beta - 3\cos^2\delta \sin\beta\cos\beta + \lambda R_\beta(\psi, a, \delta, \beta, w_2, w_3, \lambda).
\end{gathered} \tag{I2}$$

Здесь $F_1(\psi, a, 0, 0, 1, 0) = F_2(\psi, a, 0, 0, 1, 0) = 0$ и функции $F_1, F_2, R_\delta, R_\beta$ периодически зависят от ψ с периодом 2π.

При $\lambda = 0$ система (I2) имеет семейство решений

$$\psi = \omega(a_0)\tau + \psi_0, \quad a = a_0, \quad \delta = \beta = w_3 = 0, \quad w_2 = 1, \tag{I3}$$

---

x) Для построения формальных рядов необходимо, чтобы правые части уравнений (6) были бесконечно дифференцируемыми. Однако в действительности эти функции только кусочно гладкие (ср. выражения для τ_1, τ_2 и F). Поэтому, строя формальные ряды, будем считать, что над правыми частями уравнений (6) проведена операция сглаживания.

где $a_0 = const$, $\varphi_0 = const$. Это семейство соответствует семейству решений (7), (8) системы (6).

Интегральную поверхность системы (I2), совпадающую при $\lambda = 0$ с семейством решений (I3), будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\varphi &= u(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv \bar\varphi + \lambda u_1(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2 u_2(\bar\varphi,\bar a) + \cdots,\\
a &= v(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv \bar a + \lambda v_1(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2 v_2(\bar\varphi,\bar a) + \cdots,\\
\delta &= \delta_*(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv \lambda\delta_1(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2\delta_2(\bar\varphi,\bar a) + \cdots,\\
\beta &= \beta_*(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv \lambda\beta_1(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2\beta_2(\bar\varphi,\bar a) + \cdots,\\
w_2 &= w_{2*}(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv 1 + \lambda w_{21}(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2 w_{22}(\bar\varphi,\bar a) + \cdots,\\
w_3 &= w_{3*}(\bar\varphi,\bar a,\lambda) \equiv \lambda w_{31}(\bar\varphi,\bar a) + \lambda^2 w_{32}(\bar\varphi,\bar a) + \cdots .
\end{aligned} \tag{I4}$$

Здесь функции $u_k(\bar\varphi,\bar a), v_k(\bar\varphi,\bar a),\ldots,w_{3k}(\bar\varphi,\bar a)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ 2π-периодически зависят от $\bar\varphi$; переменные $\bar\varphi$ и $\bar a$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{\bar\varphi} &= P(\bar a,\lambda) \equiv \omega(\bar a) + \lambda P_1(\bar a) + \lambda^2 P_2(\bar a) + \cdots,\\
\dot{\bar a} &= Q(\bar a,\lambda) \equiv \lambda Q_1(\bar a) + \lambda^2 Q_2(\bar a) + \cdots .
\end{aligned} \tag{I5}$$

Выписанные ряды будем рассматривать как формальные, т.е. не будем заботиться об их сходимости.

Подставив ряды (I4), (I5) в систему (I2) и приравняв выражения при одинаковых степенях λ в левой и правой частях получившихся равенств, найдем цепочку уравнений для определения коэффициентов этих рядов. При выполнении неравенств

$$k\omega(\bar a) \neq \sqrt{3}, \quad k\omega(\bar a) \neq 2 \quad (k = 1,2,3,\ldots) \tag{I6}$$

указанная цепочка имеет [3] единственное решение, 2π-периодическое по $\bar\varphi$ и удовлетворяющее условиям

$$\int_0^{2\pi} u_k(\bar\varphi,\bar a)\,d\bar\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} v_k(\bar\varphi,\bar a)\,d\bar\varphi = 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Механический смысл неравенств (I6) состоит в следующем. При нарушении первой группы неравенств имеет место резонанс между движением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси по углу δ (в плоскости орбиты), при нарушении второй группы неравенств возникает резонанс между движением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси по углу β (в плоскости, перпендикулярной в плоскости орбиты).

Рассмотрим уравнения (I5). Наибольший интерес из них представляет второе уравнение, описывающее изменение переменной $\bar{a}$. Для исследования этого уравнения воспользуемся соотношением (4), которое представим в виде

$$\dot{E} = \lambda\mu_3\Phi. \tag{I7}$$

Здесь

$$\Phi = F[(w_2 - \cos\beta)\cos\delta - w_3 \sin\beta\sin\delta] = -F\dot{a}_H,$$

причем производная $\dot{a}_H$ вычислена в силу системы (6). Пусть $E_*(\bar{\psi},\bar{a})$ и $\Phi_*(\bar{\psi},\bar{a})$ – результат подстановки рядов (I4) в выражения для E и Φ. Тогда вследствие (I7)

$$(\partial E_*/\partial\bar{\psi})P + (\partial E_*/\partial\bar{a})Q = \lambda\mu_3\Phi_*.$$

Усредним обе части этого равенства по $\bar{\psi}$. Операцию усреднения будем обозначать угловыми скобками $\langle . \rangle$. Поскольку $\langle \partial E_*/\partial\bar{\psi}\rangle = 0$, имеем

$$\langle \partial E_*/\partial\bar{a}\rangle Q = \lambda\mu_3 \langle\Phi_*\rangle.$$

Несложная выкладка приводит к соотношению

$$E_*(\bar{\psi},\bar{a}) = const + \lambda h_*(\bar{a}) + O(\lambda^2),$$

где $h_*(a)$ – результат подстановки в (9) выражений (II). Отсюда находим

$$\langle \partial E_*/\partial\bar{a}\rangle = \lambda[\partial h_*(\bar{a})/\partial\bar{a}] + O(\lambda^2).$$

Анализ интеграла (9) показывает, что при всех допустимых a выполнено неравенство $\partial h_*/\partial a \neq 0$. Поэтому

$$Q(\bar{a},\lambda) = \frac{\lambda\mu_3\langle\Phi_*\rangle}{\langle\partial E_*/\partial\bar{a}\rangle} = \mu_3\frac{\langle\Phi_*\rangle}{\langle\partial h_*/\partial\bar{a}\rangle}(1+O(\lambda)).$$

Полученная формула позволяет исследовать эволюцию $\bar{a}$.

Если $\mu_3 = 0$, то $Q(\bar{a},\lambda) \equiv 0$. В этом случае $\bar{a} = const$, и ряды (I4), (I5) задают периодические решения x) с периодом $T =$

---

x) Решение $\psi(\tau), a(\tau), \delta(\tau), \beta(\tau), \ldots, w_3(\tau)$ системы (I2) будем называть периодическим, если существует такое число $T > 0$ (период), что $\psi(\tau+T) = \psi(\tau) + 2\pi$, $a(\tau+T) = a(\tau)$, $\delta(\tau+T) = \delta(\tau)$, $\beta(\tau+T) = \beta(\tau), \ldots$, $w_3(\tau+T) = w_3(\tau)$ при всех τ. У соответствующего периодического решения системы (6) $\Omega_1(\tau+T) = \Omega_1(\tau)$ и в зависимости от области в плоскости (γ, Ω_1), в которой сделана замена переменных (II), выполнено одно из равенств $\gamma(\tau+T) = \gamma(\tau) + 2\pi$ (область I), $\gamma(\tau+T) = \gamma(\tau) - 2\pi$ (область II), $\gamma(\tau+T) = \gamma(\tau)$ (области III, IV, V).

Можно доказать [3], что при $\mu_3 = 0$ и достаточно малом $|\lambda|$ ряды (I4) и (I5) сходятся.

$=2\pi/P(\bar{a},\lambda)$. Такие периодические решения были исследованы численно в [3] . Примеры этих решений приведены на рис. 5-7. Здесь для каждого решения указаны графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\Omega_1(\tau)$, $w_2(\tau)$, $w_3(\tau)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, указаны начальные условия и период T , а также приведен максимальный угол θ_m между осью Ox_1 и местной вертикалью. Этот угол находился по формуле $\theta_m = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \arccos[\cos\delta(\tau)\cos\beta(\tau)]$. Все указанные решения устойчивы. Рисунки 5-7 иллюстрируют обоснованную в [3] возможность использования движений спутника (I4), (I5) при $\mu_3 = 0$ в качестве номинальных невозмущенных движений для режима гравитационной ориентации.

Если $\mu_3 \neq 0$, то в общем случае $\dot{\bar{a}} \neq 0$ и решения (I4),(I5) не являются периодическими. Как показали численные расчеты [3], величина $\langle\Phi_*\rangle$ весьма мала при выполнении условий (I6) и может принимать заметные значения в случае нарушения этих условий. Если в начальный момент движения условия (I6) выполнены (резонанса в системе нет), то решение (I4), (I5) в течение продолжительного промежутка времени (не менее 7 сут) будет близко к соответствующему периодическому решению, получаемому из (I4), (I5) при $\mu_3 = 0$. Если же при начальном значении $\bar{a}$ условия (I6)нарушены (резонанс есть), то возможно довольно быстрое возрастание амплитуды колебаний спутника по углам δ и β , т.е. разрушение движения (I4), (I5) и нарушение режима гравитационной ориентации. По-видимому, при $\mu_3 \neq 0$ интегральная поверхность (I4), (I5) неустойчива. Механизм неустойчивости состоит в следующем. Движение, принадлежащее интегральной поверхности (I4), (I5), медленно эволюционирует и с течением времени может быть затянуто в неустойчивый резонанс. Если начальные условия движения далеки от резонанса, то время такой эволюции будет очень большим. Поэтому нерезонансные движения можно использовать в качестве номинальных невозмущенных движений спутника в режиме гравитационной ориентации на приемлемых для практических целей интервалах времени.

<u>4. Определение параметров движения спутника в режиме гравитационной ориентации по результатам измерений.</u> В начале применения режима гравитационной ориентации в феврале 1978 г. Г.М.Гречко выполнил три ряда измерений параметров движения спутника. Два ряда измерений были выполнены во время режима гравитационной ориентации и один ряд — во время свободного (неори-

ентированного) движения. Измерялись абсолютная угловая скорость спутника ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) и углы α и φ, задающие положение спутника относительно горизонта. Значения ω_1, ω_2, ω_3 считывались с цифрового индикатора угловой скорости, углы α и φ измерялись с помощью широкоугольного визира. Визир сконструирован и установлен таким образом, что направляющие косинусы a_{31}, a_{32}, a_{33}, задающие положение оси OX_3 в системе координат $Ox_1x_2x_3$, выражаются через эти углы с помощью формул

$$a_{31} = \cos\alpha\cos(\varphi-\varphi_0),\ a_{32} = -\sin(\varphi-\varphi_0),\ a_{33} = \sin\alpha\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Здесь $\varphi_0 = \arccos[R_з/(R_з+H)]$, $R_з$ – радиус Земли, H – высота орбиты спутника, и предполагается, что ось Ox_1 направлена в сторону переходного отсека станции "Салют 6". Значению $R_з$ = 340 км соответствует φ_0 = 18.3°.

Результаты первого ряда измерений, относящегося к режиму гравитационной ориентации, приведены в таблице I.

Таблица I

N	t_N	$\omega_1^{(N)}$ (град/с)	$\omega_2^{(N)}$ (град/с)	$\omega_3^{(N)}$ (град/с)	$\alpha^{(N)}$ (град)	$\varphi^{(N)}$ (град)
I	$12^h\ 00^m$	-0.I35	-0.0I9	0.075	I96	I5
2	I2 I0	-0.I25	-0.085	-0.026	I78	8
3	I2 20	-0.I20	-0.003	-0.075	I83	30
4	I2 30	-0.I30	0.038	-0.029	I88	I3
5	I2 35	-0.I45	0.045	-0.007	I82	I5
6	I3 2I	-0.I40	0.047	0.026	I84	8
7	I3 33	-0.I35	-0.022	0.03I	I87	8
8	I3 42	-0.II5	-0.038	-0.036	I86	2
9	I3 50	-0.II5	0.0I7	-0.085	I82	7
I0	I4 00	-0.I25	0.080	-0.04I	I85	I2

В этой таблице N – номер измерений; $\omega_1^{(N)}, \omega_2^{(N)}, \omega_3^{(N)}, \alpha^{(N)}, \varphi^{(N)}$ – измеренные в момент времени t_N значения величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \varphi$.

Обработка первого ряда измерений проводилась двумя спосо-

бами — методом наименьших квадратов и методом максимума правдоподобия. Рассмотрим первый способ. Пусть $\gamma(\tau), \Omega_1(\tau), \delta(\tau), \beta(\tau), w_2(\tau), w_3(\tau)$ - решение системы (6) с начальными условиями $\gamma(0)=\gamma_0$, $\Omega_1(0)=\Omega_{10}$, $\delta(0)=\delta_0$, $\beta(0)=\beta_0$, $w_2(0)=w_{20}$, $w_3(0)=w_{30}$.
Построим функционал

$$\Phi = \sum_{i=1}^{5} p_i s_i^2 , \tag{18}$$

где $p_i > 0$ $(i=1,\dots,5)$, $p_1+\dots+p_5=1$,

$$s_i^2 = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10}\left[\Omega_i(\tau_N)-\Omega_i^{(N)}\right]^2 \quad (i=1,2,3),$$

$$s_4^2 = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10}\left[\alpha(\tau_N)-\alpha^{(N)}\right]^2, \quad s_5^2 = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10}\left[\varphi(\tau_N)-\varphi^{(N)}\right]^2,$$

$$\Omega_2(\tau)=w_2(\tau)\cos\gamma(\tau)+w_3(\tau)\sin\gamma(\tau), \quad \Omega_3(\tau)=-w_2(\tau)\sin\gamma(\tau)+w_3(\tau)\cos\gamma(\tau),$$

$$\alpha(\tau)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sin\delta(\tau)\cos\gamma(\tau)+\cos\delta(\tau)\sin\beta(\tau)\sin\gamma(\tau)}{\cos\delta(\tau)\cos\beta(\tau)},$$

$$\varphi(\tau)=\varphi_0-\arcsin\left[-\sin\delta(\tau)\sin\gamma(\tau)+\cos\delta(\tau)\sin\beta(\tau)\cos\gamma(\tau)\right],$$

$$\tau_N=\omega_0(t_N-t_1), \quad \Omega_j^{(N)}=\omega_j^{(N)}/\omega_0 \quad (j=1,2,3;\ N=1,\dots,10).$$

В методе наименьших квадратов определение параметров системы (6) и начальных условий движения сводится к минимизации Φ по $\lambda, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma_0, \Omega_{10}, \delta_0, \beta_0, w_{20}, w_{30}$. Поскольку значения моментов инерции спутника известны довольно точно, при определении $\min\Phi$ параметры λ и μ будем считать фиксированными: $\lambda = 0.0535$, $\mu = 0.0697$ (см. (5)). Как показывают оценки п.2, $\mu_3/\mu_2 \approx 0.17$. Кроме того, параметры μ_2 и μ_3 "сильно завязаны между собой" и мало влияют на движение спутника — в уравнения (6) они входят в комбинации $\lambda(\mu_2+\mu_3 F)$. Поэтому при обработке результатов измерений положим $\mu_3=0$. Итак, определению подлежат восемь параметров $\mu_1, \mu_2, \gamma_0, \Omega_{10}, \delta_0, \beta_0, w_{20}, w_{30}$. Веса $p_1,\dots,p_5$ в формуле (18) следует взять обратно пропорциональными дисперсиям ошибок измерений величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \varphi$ соответственно [x]. Однако, поскольку отно-

---

[x] Полагаем, что ошибки измерений величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, α и φ независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним значением. Дисперсии ошибок измерений одной и той же величины в разные моменты времени равны.

шения этих дисперсий неизвестны, положим $p_1 = \dots = p_5 = 1/5$.

Поиск минимума Φ проводился в два этапа. На первом этапе определялись близкие экстремальным значения параметров γ_0, Ω_{10} и μ_1. На втором этапе проводилась полная минимизация. Целесообразность такого подхода обусловлена тем, что движение спутника в режиме гравитационной ориентации представляет собой движение в окрестности интегральной поверхности, построенной в п.3. На этой поверхности в нулевом приближении

$$\Omega_1 = \bar{\Omega}_1(\tau),\ \Omega_2 = \cos\bar{\gamma}(\tau),\ \Omega_3 = -\sin\bar{\gamma}(\tau),\ \alpha = \pi,\ \varphi = \varphi_0,$$

где $\bar{\gamma}(\tau), \bar{\Omega}_1(\tau)$ – решение системы (8). Такое решение задается параметрами γ_0, Ω_{10} и μ_1, более других параметров, влияющих на движение спутника в режиме гравитационной ориентации. Поэтому для грубого определения экстремальных значений $\gamma_0, \Omega_{10}, \mu_1$ вместо функционала (18) можно минимизировать функционал

$$\Phi_1 = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10}\{p_1[\Omega_1(\tau_N) - \Omega_1^{(N)}]^2 + p_2[\cos\bar{\gamma}(\tau_N) - \Omega_2^{(N)}]^2 + p_3[\sin\bar{\gamma}(\tau_N) + \Omega_3^{(N)}]^2\},$$

где $\bar{\gamma}(\tau), \bar{\Omega}_1(\tau)$ – решение системы (18) с начальными условиями $\bar{\gamma}(0) = \gamma_0, \bar{\Omega}_1(0) = \Omega_{10}$. Для вычисления Φ_1 необходимо интегрировать систему второго порядка, тогда как вычисление Φ требует интегрирования системы шестого порядка. Следовательно, предварительное грубое определение экстремальных значений γ_0, Ω_{10} и μ_1 с помощью минимизации Φ_1 экономит машинное время.

Минимизация Φ_1 проводилась методом случайного поиска и дала следующие результаты:

$$\Phi_1 = 0.0274,\quad \gamma_0 = 4.392,\quad \Omega_{10} = -2.267,\quad \mu_1 = 0.930. \qquad (19)$$

Для проверки проведенных расчетов вычислялось решение системы (6) при γ_0, Ω_{10} и μ_1, определенных соотношениями (19), и $\delta_0 = \beta_0 = w_{20} - 1 = w_{30} = \mu_2 = 0$. Графики функций $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ в этом решении изображены сплошными линиями на рис. 8, звездочками на том же рисунке указаны результаты измерений. Как видно из рисунка, уже решениями системы (8) можно качественно верно аппроксимировать измерения угловой скорости.

Минимизация Φ по всем параметрам проводилась методом Розенброка. В начальной точке поиска значения γ_0, Ω_{10}, μ_1 брались в виде (19) и полагалось $\delta_0 = \beta_0 = w_{20} - 1 = w_{30} = \mu_2 = 0$. Минимизация дала следующие результаты:

$\Phi = 0.006$, $\gamma_0 = 4.4107$, $\Omega_{10} = -2.2319$, $\delta_0 = -0.18365$,
$\beta_0 = -0.20897$, $w_{20} = 1.15688$, $w_{30} = -0.13300$, $\mu_1 = 0.61977$,
$\mu_2 = 0.70384$. (20)

Для оценки точности достижения экстремума и оценки влияния параметров $\gamma_0, \Omega_{10}, \ldots, \mu_2$ на величину Φ в окрестности экстремума в точке (20) вычислялись производные $\partial\Phi/\partial p$, $\partial^2\Phi/\partial p\partial q$ ($p,q = \gamma_0, \Omega_{10}, \ldots, \mu_2$). Дифференцирование проводилось численно, для аппроксимации производных использовались симметричные разности. Было найдено

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_0} = -0.0005,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\Omega_{10}} = -0.0020,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\delta_0} = -0.0005,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_0} = -0.0018,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial w_{20}} = -0.0006,\ \frac{\partial\Phi}{\partial w_{30}} = -0.0018,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_1} = -0.0001,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_2} = -0.0001, \quad (21)$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_0^2} = 0.24,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Omega_{10}^2} = 12.2,\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\delta_0^2} = 0.85,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta_0^2} = 0.79,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial w_{20}^2} = 0.24,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial w_{30}^2} = 0.59,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_1^2} = 1.55,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_2^2} = 0.0007.$$

Перекрестные вторые производные для экономии места приводить не будем. Укажем только, что в силу положительной определенности матрицы вторых производных в точке минимума для них справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial q}\right| < \sqrt{\frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}} \quad (p,q = \gamma_0, \Omega_{10}, \ldots, \mu_2).$$

Производные находились при разных значениях шагов дифференцирования. Сопоставление полученных результатов позволяет заключить, что ошибка в их вычислении составляет $\leqslant 10\%$.

Величина $\partial^2\Phi/\partial p^2$ характеризует точность определения параметра p в процессе минимизации Φ. Чем больше $\partial^2\Phi/\partial p^2$, тем точнее найдено экстремальное значение p x). Сравнение величин (21)

x) Оценка точности определения параметров $\gamma_0,\ldots,\mu_2$ может быть дана с помощью корреляционной матрицы этих величин. В рамках метода наименьших квадратов такая матрица приблизительно равна $\frac{1}{42}\Phi_0 K_0$. Здесь $\Phi_0 = \min\Phi$, K_0 – матрица, обратная матрице вторых производных функции Φ в точке минимума. В силу неточного определения вторых производных функции Φ и большого разброса их значений по порядку величины надежное вычисление K_0 связано с большими трудностями и поэтому не проводилось.

показывает, что наиболее точно найдено Ω_{10}, затем идут μ_1, δ_0, β_0, w_{30}, затем — w_{20}, γ_0, и, наконец, наименее точно определено μ_2.

На рис. 9 сплошными линиями изображены графики функций $\alpha(t)-180^\circ, \varphi(t), \theta(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ для решения системы (6) с параметрами (20). Звездочками на том же рисунке указаны результаты измерений (звездочки рядом с графиком функции $\theta(t)$ указывают значения угла θ, вычисленные по измерениям углов α и φ). Как видно из рисунка, найденное решение хорошо аппроксимирует результаты измерений. Количественную оценку качества аппроксимации можно получить, оценивая дисперсии $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_5^2$ ошибок измерений величин ω_1, ω_2, ω_3, α и φ. Для этих дисперсий имеют место оценки: $\sigma_i^2 = s_i^2$ $(i=1,\ldots,5)$. В точке (20)

$s_1 = 0.095$ (0.0063 град/с), $s_2 = 0.09$ (0.0060 град/с),

$s_3 = 0.069$ (0.0046 град/с), $s_4 = 0.05$ (2.88°),

$s_5 = 0.064$ (3.64°).

Точность показаний индикатора угловой скорости составляет ≈ 0.002 град/с, точность определения углов с помощью широкоугольного визира - $\approx 2^\circ$. Таким образом, полученные оценки дисперсий в несколько раз превышают ошибки измерительных приборов. Этот факт можно объяснить погрешностью уравнений (6), а также тем, что фактическая точность измерений была хуже точности приборов. Приведем пример. Измерения и запись шести величин — t, ω_1, ω_2, ω_3, α и φ в условиях невесомости требует около I мин. времени. В решении с параметрами (20) максимальные изменения величин ω_1, ω_2, ω_3, α, φ за I мин. составляют $\Delta\omega_1 \approx 0.003$ град/с, $\Delta\omega_2 \approx \Delta\omega_3 \approx 0.008$ град/с, $\Delta\alpha \approx \Delta\varphi \approx 2.6^\circ$. Следовательно, только за счет ошибки в привязке измерений ко времени можно получить погрешность, превышающую погрешность приборов.

После того, как получены оценки дисперсий ошибок измерений, можно положить в (I8) $p_i = s_i^{-2}/(s_1^{-2}+\ldots+s_5^{-2})$ $(i=1,\ldots,5)$ и повторить минимизацию Φ еще раз и т.д. В результате такого итерационного процесса можно точнее оценить параметры $\gamma_0, \ldots, \mu_2$, чем это было сделано выше. Правильнее однако в случае неизвестных дисперсий $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_5^2$ воспользоваться для оценки $\gamma_0, \ldots, \mu_2$ методом максимума правдоподобия. Согласно этому методу определение параметров $\gamma_0, \ldots, \mu_2$ и дисперсий $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_5^2$ сводится к минимизации функционала

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{s_i^2}{\sigma_i^2} + \ln \sigma_i^2 \right) \qquad (22)$$

по оцениваемым величинам.

Сначала проведем частичную минимизацию по $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_5^2$. Решая уравнения $\partial\Phi'/\partial\sigma_i^2 = 0$, находим $\sigma_i^2 = s_i^2$ $(i=1,\ldots,5)$. Эти соотношения дают известные оценки для дисперсий. Подставляя их в (22) и отбрасывая в полученном выражении несущественную аддитивную постоянную, получаем

$$\Phi_1' = \sum_{i=1}^{5} \ln s_i^2 .$$

Теперь определение $\gamma_0, \ldots, \mu_2$ сведено к минимизации Φ_1'. Поиск $\min \Phi_1'$ проводился методом Розенброка из начальной точки (20). Минимизация дала следующие результаты

$$\begin{aligned}
&\Phi_1' = -26.64, \quad \gamma_0 = 4.3989, \quad \Omega_{10} = -2.2326, \quad \delta_0 = -0.16769,\\
&\beta_0 = -0.20092, \quad w_{20} = 1.11824, \quad w_{30} = -0.18253, \qquad (23)\\
&\mu_1 = 0.60442, \quad \mu_2 = 0.25724, \quad s_1 = 0.096 \ (0.0064 \text{ град/с}),\\
&s_2 = 0.113 \ (0.0075 \text{ град/с}), \quad s_3 = 0.1077 \ (0.0051 \text{ град/с}),\\
&s_4 = 0.035 \ (1.98^\circ), \quad s_5 = 0.057 \ (3.25^\circ),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_1'}{\partial\gamma_0} = 0.23, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial\Omega_{10}} = 1.5, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial\delta_0} = 0.003, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial\beta_0} = 0.050,\\
&\frac{\partial\Phi_1'}{\partial w_{20}} = -0.010, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial w_{30}} = -0.37, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial\mu_1} = 0.20, \quad \frac{\partial\Phi_1'}{\partial\mu_2} = -0.0013,\\
&\frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\gamma_0^2} = 120, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\Omega_{10}^2} = 7800, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\delta_0^2} = 780, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\beta_0^2} = 840,\\
&\frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial w_{20}^2} = 280, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial w_{30}^2} = 400, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\mu_1^2} = 1100, \quad \frac{\partial^2\Phi_1'}{\partial\mu_2^2} = 0.7.
\end{aligned}$$

Здесь точность вычисления производных та же, что и в (21).

Сравнение результатов первого и второго способов обработки измерений показывает, что оба способа дают примерно одинаковые значения параметров $\gamma_0, \Omega_{10}, \delta_0, \beta_0, w_{20}, w_{30}, \mu_1$. Значения μ_2 отличаются приблизительно в три раза. Сравнительная точность определения параметров (оцениваемая производными $\partial^2\Phi/\partial p^2$ и $\partial^2\Phi_1'/\partial p^2$, $p = \gamma_0, \ldots, \mu_2$) также примерно одинакова. Во втором способе за счет некоторого увеличения оценок дисперсий s_1^2, s_2^2, s_3^2 были уменьшены s_4^2 и s_5^2. Решение системы (6) с параметрами (23) приведено на рис. 10. Анализ графиков на рис. 9,10 и соответствующих величин $s_1,\ldots,s_5$ показывает, что решения уравнений (6) позволяют довольно точно аппроксимировать результаты измерений, указанные в таблице I. Решения, используемые для аппроксимации, близки решениям на интегральной поверхности (14), (15) в области II.

5. Оценка точности математической модели на большом интервале времени. В п.4 графическая оценка согласия принятой математической модели (уравнений (6)) с результатами измерений проводилась с помощью рис. 9,10. Другой более простой, но грубый графический критерий согласия заключается в следующем. На фазовом портрете системы (8) звездочками нанесем точки $(\gamma^{(N)}, \Omega_1^{(N)})$, для которых $\cos\gamma^{(N)}=\Omega_2^{(N)}/\sqrt{\Omega_2^{(N)2}+\Omega_3^{(N)2}}$, $\sin\gamma^{(N)}=-\Omega_3^{(N)}/\sqrt{\Omega_2^{(N)2}+\Omega_3^{(N)2}}$, а величины $\Omega_1^{(N)}, \Omega_2^{(N)}, \Omega_3^{(N)}$ представляют собой результаты измерений $\omega_1^{(N)}, \omega_2^{(N)}, \omega_3^{(N)}$, отнесенные к ω_0. Если звездочки будут располагаться вдоль траекторий системы (8), то согласие хорошее; в противном случае — плохое. Такой критерий основан на попытке аппроксимировать измерения $\omega_1^{(N)}, \omega_2^{(N)}, \omega_3^{(N)}$ движениями вида (7), (8). Результат применения этого критерия к данным табл. I приведен на рис. II. Как видно из рисунка, согласие рассматриваемых данных с движениями (7), (8) хорошее.

Удобство поедложенного критерия согласия состоит в том, что для его применения не надо проводить громоздких расчетов, связанных с минимизацией функционалов по неизвестным параметрам движения. С помощью этого критерия можно одинаково просто оценить результаты измерений, выполненных как на коротких, так и на длинных интервалах времени.

Рассмотрим применение упрощенного графического критерия ко второму ряду измерений, проведенных Г.М.Гречко в режиме гравитационной ориентации. Результаты этого ряда измерений сведены в таблицу 2. Если в первом ряду измерения проводились примерно через 10 мин. (за исключением времени, когда спутник находился в тени Земли) и охватывали двухчасовой интервал времени, то во втором ряду измерения проводились несколько раз в сутки и охватывали интервал длиной 3.5 сут. Соответствующие второму ряду измерений точки $(\gamma^{(N)}, \Omega_1^{(N)})$ на фазовом портрете системы (8) приведены на рис. 12. На этом рисунке рядом с каждой точкой указан ее порядковый номер N. Как видно из рис. 12, точки $(\gamma^{(N)}, \Omega_1^{(N)})$ в плоскости $(\gamma(\mathrm{mod}\,2\pi), \Omega_1)$ располагаются хаотически, хотя точность гравитационной ориентации в течение рассматриваемо-

Таблица 2

N	$t^{(N)}$ сутки	$t^{(N)}$ часы, мин.	$\omega_1^{(N)}$ (град/с)	$\omega_2^{(N)}$ (град/с)	$\omega_3^{(N)}$ (град/с)	$\alpha^{(N)}$ (град)	$\varphi^{(N)}$ (град)	$\theta^{(N)}$ (град)
I	I5.02.78	2I^{h}00^m	-0.002	0.004	-0.065	I80	I5	3.3
2	I6.02.78	09 33	0.075	0.034	0.044	I79	I5	3.4
3	- " -	II II	-0.0I6	0.053	-0.028	I82	I8	2.0
4	- " -	I2 33	-0.032	-0.0I3	-0.060	I79.5	I5	3.3
5	- " -	I3 54	-0.047	-0.059	-0.005	I77	I5	4.5
6	- " -	I6 53	-0.05I	0.047	0.032	I80	I8	0.3
7	- " -	22 00	-0.I45	0.009	-0.070	I70	I0	I3.0
8	I7.02.78	00 22	-0.I65	0.048	-0.038	I78	I5	3.9
9	- " -	I4 I2	-0.I75	-0.038	0.038	I83	8	I0.7
I0	- " -	I6 II	-0.I70	0.0I6	-0.065	I87	I3	8.8
II	- " -	I7 29	-0.I65	0.060	0.02I	I83	30	I2.I
I2	- " -	I9 03	-0.I65	-0.055	-0.025	I8I	3	I5.3
I3	I8.02.78	0I I6	-0.I45	-0.008	-0.055	I67	I3	I4.0
I4	- " -	I0 II	-0.I35	-0.035	-0.050	I85	23	6.8
I5	- " -	I0 I9	-0.I35	0.0I5	-0.070	I90	I2	II.8
I6	- " -	I0 26	-0.I45	0.060	-0.030	I80	I7	I.3
I7	- " -	I0 32	-0.I65	0.052	0.034	I86	23	7.6
I8	I8.02.78	23 59	-0.070	-0.05I	0.024	I88	3	I7.2
I9	I9.02.78	09 I0	0.053	-0.048	-0.046	I80	I8	0.3
20	- " -	I0 39	0.060	-0.032	-0.053	I9I	2I	II.3

го промежутка времени была довольно высокой. Последнее утверждение следует из анализа величин $\theta^{(N)}$, вычисленных по результатам измерений углов α и φ и приведенных в последнем столбце таблицы 2.

Несогласованность точек $(\gamma^{(N)}, \Omega_1^{(N)})$ на рис. I2 с траекториями системы (8) можно объяснить недостаточной точностью уравний (6) для описания движения спутника на интервалах времени порядка нескольких суток и, по-видимому, в первую очередь тем, что в этих уравнениях не учитывается вращение солнечных батарей вслед за Солнцем. Кроме того точка $(\gamma^{(1)}, \Omega_1^{(1)})$ весьма близка к неустойчивому положению равновесия системы (8) (ср. (10)) $\gamma = \pi/2, \Omega_1 = 0$. Но из общих соображений и расчетов [2,4] ясно, что из всех решений уравнений (6) с начальными условиями $\gamma(0) = \gamma_0$, $\Omega_1(0) = \Omega_{10}$, $\delta(0) = \beta(0) = w_2(0) - 1 = w_3(0) = 0$ именно решения, для которых γ_0 и Ω_{10} лежат в окрестности точки $\gamma = \pi/2$, $\Omega_1 = 0$, будут наиболее чувствительны к возмущениям этих уравнений. Таким образом, ситуация, возникшая при оценке точности уравнений (6) с помощью второго ряда измерений является наихудшей.

В п. 4 по результатам измерений определялось вращательное движение спутника, близкое движению на интегральной поверхности (14), (15) в области II. При достаточно больших значениях $|\Omega_1|$ точность описания уравнениями (6) таких движений и аналогичных движений в области I довольно слабо зависит от возмущений этих уравнений, например, от того, учитывается ли в них вращение солнечных батарей или нет. Это связано с усреднением возмущений по вращению спутника вокруг оси Ox_1. Кроме того измерения, рассмотренные в п.4, охватывают короткий интервал времени. Указанные обстоятельства обусловили хорошее согласие математической модели с результатами измерений. В частности для μ_1 были получены оценки, близкие к расчетному значению (см. (5)).

6. Определение параметров свободного движения спутника. Проведенная в п.4 оценка параметров движения спутника по результатам измерений позволила оценить и точность этих измерений. Однако такая оценка получена в рамках математической модели, которая, как выяснилось в п.5, не всегда точна. Поэтому хотелось бы получить оценку точности измерений величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \varphi$ другим способом. Возможность сделать это дает третий ряд измерений параметров движения спутника, выполненных Г.М.Гречко в режиме свободного (неориентированного) движения спутника.

Результаты третьего ряда измерений сведены в таблицу 3. Измерения настолько плотно расположены во времени, что позволяют использовать следующий метод их обработки. По данным таблицы 3 с помощью сплайнов зададим функции $\omega_i = \omega_i^*(t)$ $(i = 1, 2, 3)$. Примем "кинематическую модель" движения спутника, описываемую первыми тремя уравнениями (1). Рассматривая эти уравнения при

Таблица 3

N	$t^{(N)}$	$\omega_1^{(N)}$ (град/с)	$\omega_2^{(N)}$ (град/с)	$\omega_3^{(N)}$ (град/с)	$\alpha^{(N)}$ (град)	$\varphi^{(N)}$ (град)
I	$I4^h I4^m$	0.003	-0.003	0.007	-	-
2	I6	0.006	-0.0I2	0.004	-	-
3	I8	0.008	-0.022	0.00I	-	-
4	20	0.0I0	-0.033	-0.002	-	-
5	22	0.0I3	-0.044	-0.005	-	-
6	24	0.0I5	-0.055	-0.008	226	2
7	26	0.0I7	-0.070	-0.0I0	-	-
8	28	0.022	-0.090	-0.0I0	222	5
9	30	0.027	-0.I00	-0.009	2I8	6
I0	32	0.03I	-0.I20	-0.007	2I6	I0
II	34	0.036	-0.I30	0.000	208	I2
I2	36	0.040	-0.I30	0.007	202	I5
I3	38	0.044	-0.I40	0.0I8	I92	I8
I4	40	0.047	-0.I45	0.030	I82	I8
I5	46	0.048	-0.II5	0.070	-	-
I6	50	0.044	-0.085	0.075	-	-
I7	55	0.04I	-0.038	0.065	-	-
I8	$I5^h 00^m$	0.038	-0.0II	0.042	-	-
I9	05	0.037	0.005	0.0I7	-	-
20	I0	0.037	0.0I0	-0.007	-	-
2I	I5	0.037	0.006	-0.0I3	-	-
22	20	0.037	0.005	0.003	I74	55
23	25	0.035	0.0I6	0.028	I56	60
24	30	0.033	0.037	0.049	I46	55
25	35	0.030	0.075	0.065	I46	45
26	40	0.027	0.II5	0.075	I59	25
27	$46^m 30^s$	0.025	0.I35	0.049	I82	8
28	50	0.029	0.I35	0.032	I98	5
29	55	0.029	0.II5	0.007	2I5	I0
30	$I6^h 00^m$	0.024	0.085	-0.008	224	20
3I	05	0.0I6	0.042	-0.0II	224	25
32	I0	0.007	0.0I5	-0.006	2I2	30
33	I2	0.003	0.006	-0.00I	2I0	35

$\omega_i=\omega_i^*(t)$ $(i=1,2,3)$ попытаемся аппроксимировать их решениями результаты измерений углов α и φ. Обработка данных таблицы 3 с помощью "кинематической модели" может быть проведена и более совершенными методами, однако предложенный метод является, по-видимому, самым простым.

Функции $\omega_i=\omega_i^*(t)$ зададим параметрически в виде

$$t=t^{(1)}+\omega_0\bar{\tau}(u),\ \omega_i=\omega_0\bar{\Omega}_i(u)\ (i=1,2,3),\ 0\le u\le 32.$$

Здесь $\bar{\tau}(u)$ и $\bar{\Omega}_i(u)$ определяются однотипными выражениями

$$\bar{x}(u)=(1-v)x^{(N)}+v\,x^{(N+1)}+(1-v)^3\frac{x^{(N-1)}-2x^{(N)}+x^{(N+1)}}{6}+v^3\frac{x^{(N)}-2x^{(N+1)}+x^{(N+2)}}{6},\quad(24)$$

где $N=[u]+1$, $v=u-[u]$ ($[u]$ - целая часть числа u), $x^{(N)}$ $(N=0,1,\dots 34)$ - некоторые коэффициенты. Выражение (24) называется кубическим B-сплайном [5]. Коэффициенты $x^{(N)}$ в (24) можно выбирать разными способами. Самый простой из них состоит в том, чтобы положить $x^{(0)}=2x^{(1)}-x^{(2)}$, $x^{(34)}=2x^{(33)}-x^{(32)}$, а в качестве $x^{(N)}(N=1,\dots,33)$ использовать величины $\tau^{(N)}=\omega_0(t^{(N)}-t^{(1)})$, $\Omega_i^{(N)}=\omega_i^{(N)}/\omega_0$, определяемые по данным таблицы 3. Полученные таким образом функции $\omega_i=\omega_i^*(t)$ $(i=1,2,3)$ приведены на рис. I3 (сплошные кривые). Звездочками на этом рисунке указаны точки $(t^{(N)},\omega_i^{(N)})$ $(N=1,\dots,33)$. Как видно из рисунка и следует из (24), кривые $\omega_i=\omega_i^*(t)$ не проходят через точки $(t^{(N)},\omega_i^{(N)})$ за исключением концевых точек $(t^{(1)},\omega_i^{(1)})$, $(t^{(33)},\omega_i^{(33)})$. Это — свойство B-сплайна. За счет этого свойства задаваемые с помощью B-сплайнов аппроксимирующие кривые получаются плавными, и достигается некоторое сглаживание результатов измерений. Такое сглаживание, однако, хотя и является весьма полезным, приводит к заметным ошибкам аппроксимации в окрестности точек экстремума функций $\omega_i^*(t)$ (см. рис. I3). Для устранения указанных ошибок некоторые коэффициенты $x^{(N)}$ были исправлены подбором. Внесенные исправления эквивалентны следующему изменению данных таблицы 3:

$$\omega_1^{(15)}\to0.049,\ \omega_1^{(27)}\to0.023,\ \omega_1^{(28)}\to0.030,\ \omega_1^{(29)}\to0.030,\ \omega_2^{(14)}\to0.148,$$
$$\omega_3^{(16)}\to0.078,\ \omega_3^{(21)}\to-0.018,\ \omega_3^{(26)}\to0.084,\ \omega_3^{(31)}\to-0.013.$$

Полученные в результате описанного уточнения аппроксимирующие кривые $\omega_i=\omega_i^*(t)$ приведены на рис. I4. Звездочками на этом рисунке указаны, разумеется, истинные, а не "исправленные" результаты измерений. Рассматриваемые кривые используются в последующем анализе. Среднеквадратичные ошибки принятого способа аппроксимации измерений угловых скоростей $\omega_1, \omega_3, \omega_3$ составляют соответственно

$s_1 \approx 0.0057$ (0.0004 град/с), $s_2 \approx s_3 \approx 0.032$ (0.002 град/с).

Уравнения (I) относительно углов γ, δ, β в случае $\omega_i = \omega_i^*(t)$ можно привести к виду

$$\frac{d\gamma}{du} = \{\bar\Omega_1(u) - tg\beta[\bar\Omega_2(u)\cos\gamma - \bar\Omega_3(u)\sin\gamma]\}\frac{d\bar\tau(u)}{du},$$
$$\frac{d\delta}{du} = \left\{\frac{1}{\cos\beta}[\bar\Omega_2(u)\cos\gamma - \bar\Omega_3(u)\sin\gamma] - 1\right\}\frac{d\bar\tau(u)}{du}, \qquad (25)$$
$$\frac{d\beta}{du} = [\bar\Omega_2(u)\sin\gamma + \bar\Omega_3(u)\cos\gamma]\frac{d\bar\tau(u)}{du}.$$

Пусть $\gamma(u), \delta(u), \beta(u)$ - решение уравнений (25) с начальными условиями $\gamma(0)=\gamma_0$, $\delta(0)=\delta_0$, $\beta(0)=\beta_0$. Составим функционал

$$\Phi = \sum_N\{[\alpha(N)-\alpha^{(N)}]^2 + [\varphi(N)-\varphi^{(N)}]^2\},$$

где (ср. п.4)

$$\alpha(u) = \pi + arctg\frac{\sin\delta(u)\cos\gamma(u) + \cos\delta(u)\sin\beta(u)\sin\gamma(u)}{\cos\delta(u)\cos\beta(u)},$$

$$\varphi(u) = \varphi_0 - arcsin[-\sin\delta(u)\sin\gamma(u) + \cos\delta(u)\sin\beta(u)\cos\gamma(u)],$$

и суммирование проводится по всем измерениям углов α и φ, указанным в таблице 3. Для определения начальных условий решения, аппроксимирующего измерения углов α и φ, найдем $\min\limits_{\gamma_0,\delta_0,\beta_0}\Phi$ (метод наименьших квадратов). Минимизация Φ проводилась сначала с помощью случайного поиска, а затем методом Розенброка. В результате были получены следующие значения функционала и начальных условий

$$\Phi = 0.1, \quad \gamma_0 = 2.7159, \quad \delta_0 = -0.36271, \quad \beta_0 = 0.12360. \qquad (26)$$

Графики функций $\gamma(t), \delta(t), \beta(t), \alpha(t), \varphi(t)$ для решения уравнений (25) с начальными условиями (26) изображены на рис. 15. Звездочками на этом рисунке указаны результаты измерений углов α и φ. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации точек $(t^{(N)}, \alpha^{(N)})$ и $(t^{(N)}, \varphi^{(N)})$ найденными функциями $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ составляют [x]

$s_4 = 0.044$ (2.5°), $s_5 = 0.056$ (3.2°).

---

[x] Для сравнения укажем, что при использовании в кинематической модели функций $\omega_i = \omega_i^*(t)$, представленных на рис. 13, в точке экстремума $\Phi = 0.16$, $\gamma_0 = 2.7147$, $\delta_0 = -0.35608$, $\beta_0 = 0.14346$, $s_4 = 0.045$ (2.6°), $s_5 = 0.68$ (3.9°).

Используемая в данном пункте математическая модель спутника основана на простых кинематических соотношениях и является весьма точной. В рамках этой модели для дисперсий ошибок измерений углов α и φ с помощью широкоугольного визира были получены оценки, практически совпадающие с оценками п.4. Это с одной стороны подтверждает правильность полученных оценок величин σ_4 и σ_5, с другой стороны говорит о приемлемой точности уравнений (6) для обработки первого ряда измерений.

Анализ функций $\gamma(t)$, $\delta(t)$ и $\beta(t)$ на рис. 15 показывает, что движение спутника, параметры которого приведены в таблице 3, представляет собой суперпозицию колебаний оси Ox_1 относительно местной вертикали и вращения спутника вокруг этой оси. Колебания оси Ox_1 происходят почти в плоскости орбиты и обусловлены действием на спутник восстанавливающего гравитационного момента. Последнее утверждение иллюстрируется следующим расчетом. Движение оси Ox_1 в плоскости орбиты с учетом действия на спутник гравитационного момента можно приближенно описать уравнением

$$\ddot{\delta} + 3(1-\lambda)\sin\delta\cos\delta = 0.$$

Период T и амплитуда δ_m колебательного решения этого уравнения связаны между собой соотношением

$$T = \frac{4K(\sin\delta_m)}{\sqrt{3(1-\lambda)}}. \qquad (27)$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – модуль эллиптических функций. Из графика функции $\delta(t)$ (рис.15) находим $T \approx 4.58$ (67 мин.), $\delta_m \approx 0.82$ (47°). Согласно же формуле (27) для $T = 4.58$ имеем $\delta_m = 50^\circ$. Налицо хорошее совпадение. Таким образом, движение, приведенное на рис. 15, можно считать сильно возмущенным движением спутника в режиме гравитационной ориентации.

Литература

1. Гречко Г.М., Романенко Ю.В., Легостаев В.П., Сарычев В.А., Сазонов В.В., Гансвинд И.Н. Режим гравитационной ориентации на орбитальном комплексе "Салют 6 - Союз". Доклад на УШ симпозиуме ИФАК по автоматематическому управлению в космосе, Оксфорд, 2-6 июля, 1979.
2. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Гравитационная ориентация больших орбитальных станций. Доклад на XXXI конгрессе МАФ, Токио, 21-28 сентября, 1980. Sarychev V.A., Sazonov V.V. Gravity gradient stabilization of large space stations. Acta Astronautica, 1981, vol. 8, No. 5-6, 549.
3. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации орбитального комплекса "Салют 6 - Союз". Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1982, № 99.
4. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1980, № 152.
5. Wu Sheng-Chuan, Abel J.F., Greenberg D.P. An interactive computer graphics approach to surface representation. Communication of the ACM, 1977, vol. 20, No. 10, 703.

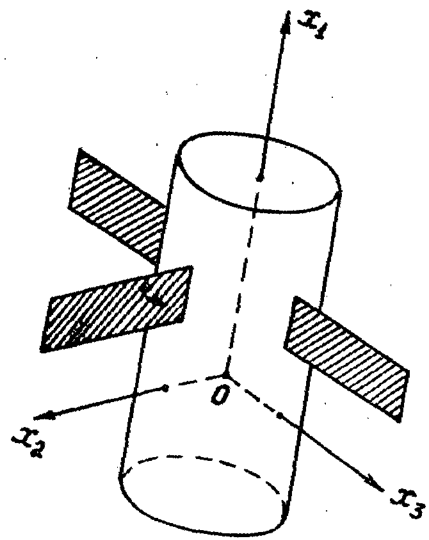


Рис. 1

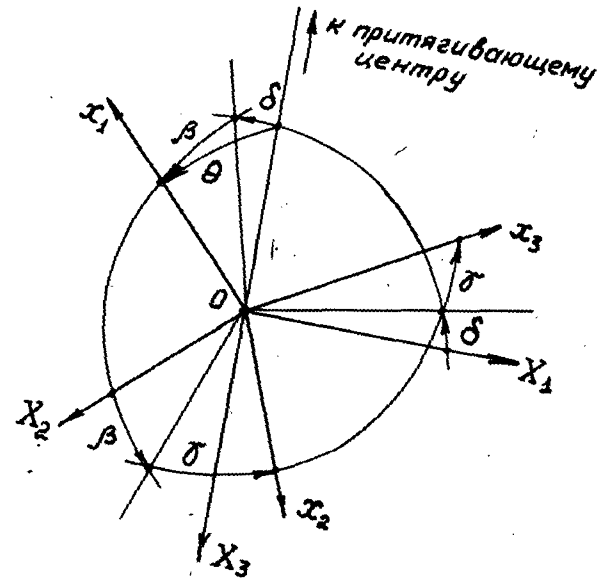
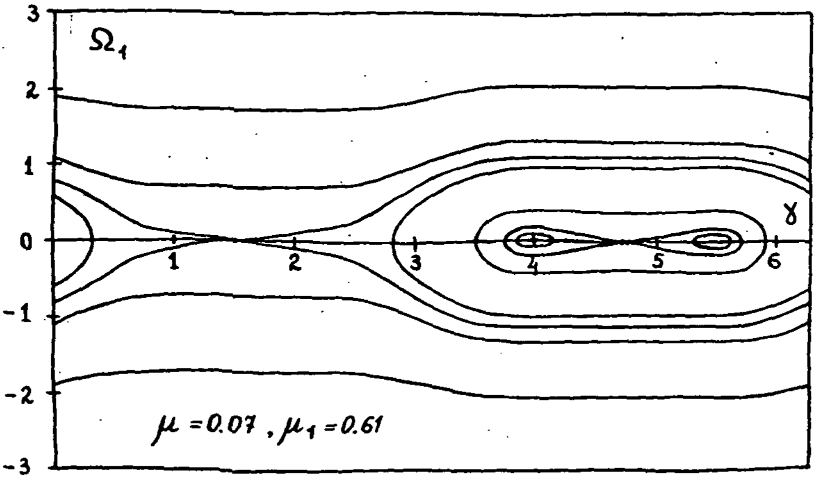
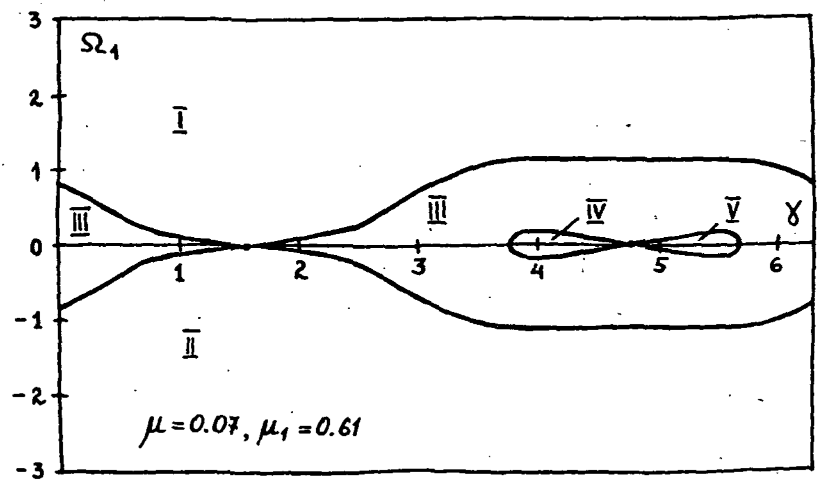


Рис.2



3
2
1
0
-1
-2
-3
Ω_1
γ
1
2
3
4
5
6
$\mu = 0.07$, $\mu_1 = 0.61$

Рис. 3



3
2
1
0
-1
-2
-3
Ω_1
I
II
III
III
IV
V
γ
1
2
3
4
5
6
$\mu = 0.07$, $\mu_1 = 0.61$

Рис. 4

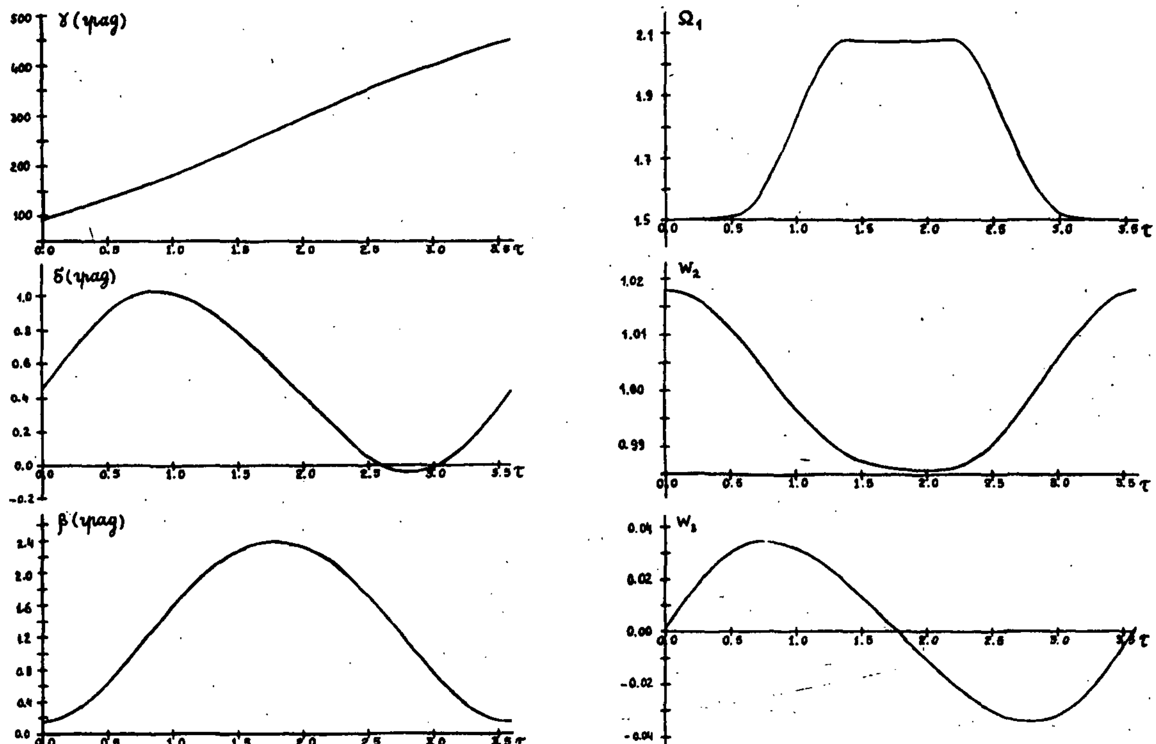


Рис. 5. Периодическое решение (область I); $\lambda = 0.05$, $\mu = 0.07$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$, $\mu_3 = 0$; $\gamma(0) = \pi/2$, $\delta(0) = 0.007619$, $\beta(0) = 0.002556$, $\Omega_1(0) = 1.5$, $W_2(0) = 1.017997$, $W_3(0) = 0.000803$, $T = 3.600889$, $\theta_m = 2.46°$.

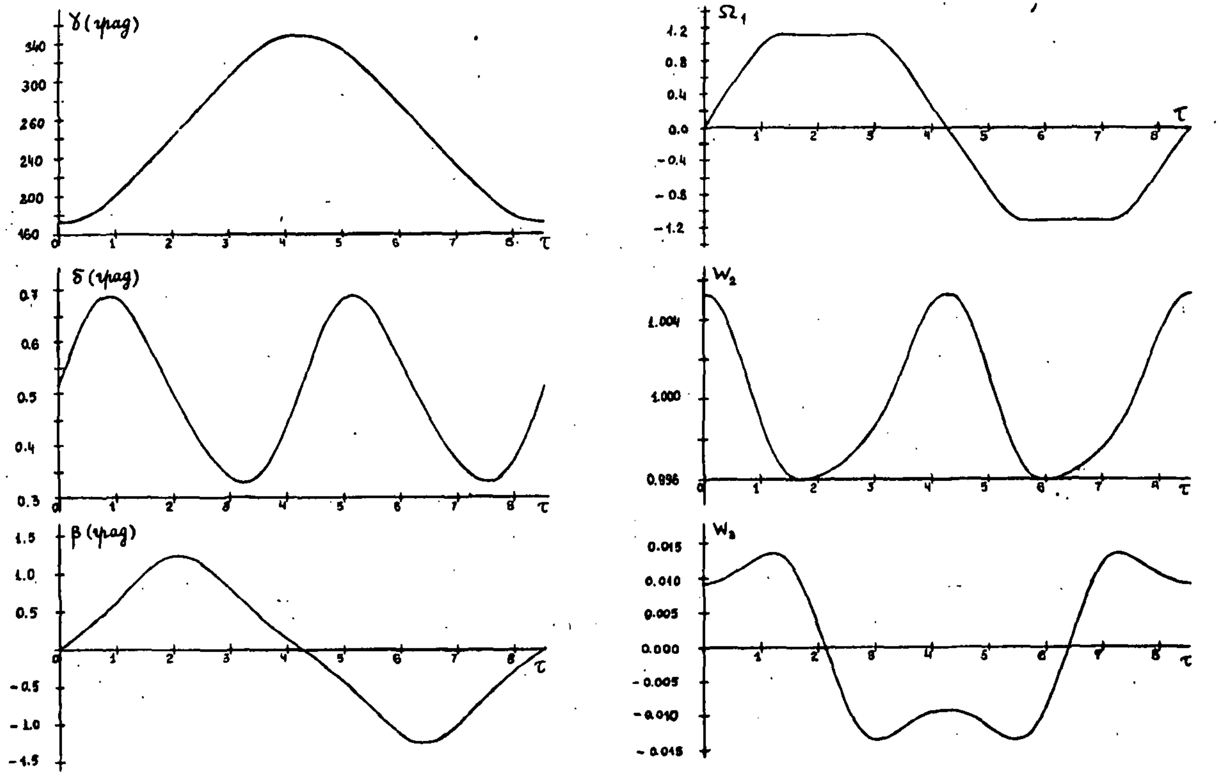


Рис. 6. Периодическое решение (область III): $\lambda = 0.05$, $\mu = 0.07$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$, $\mu_3 = 0$; $\gamma(0) = 3$, $\delta(0) = 0.008963$, $\beta(0) = 0.000064$, $\Omega_1(0) = 0$, $W_2(0) = 1.005350$, $W_3(0) = 0.009163$, $T = 8.552918$, $\theta_m = 1.33°$.

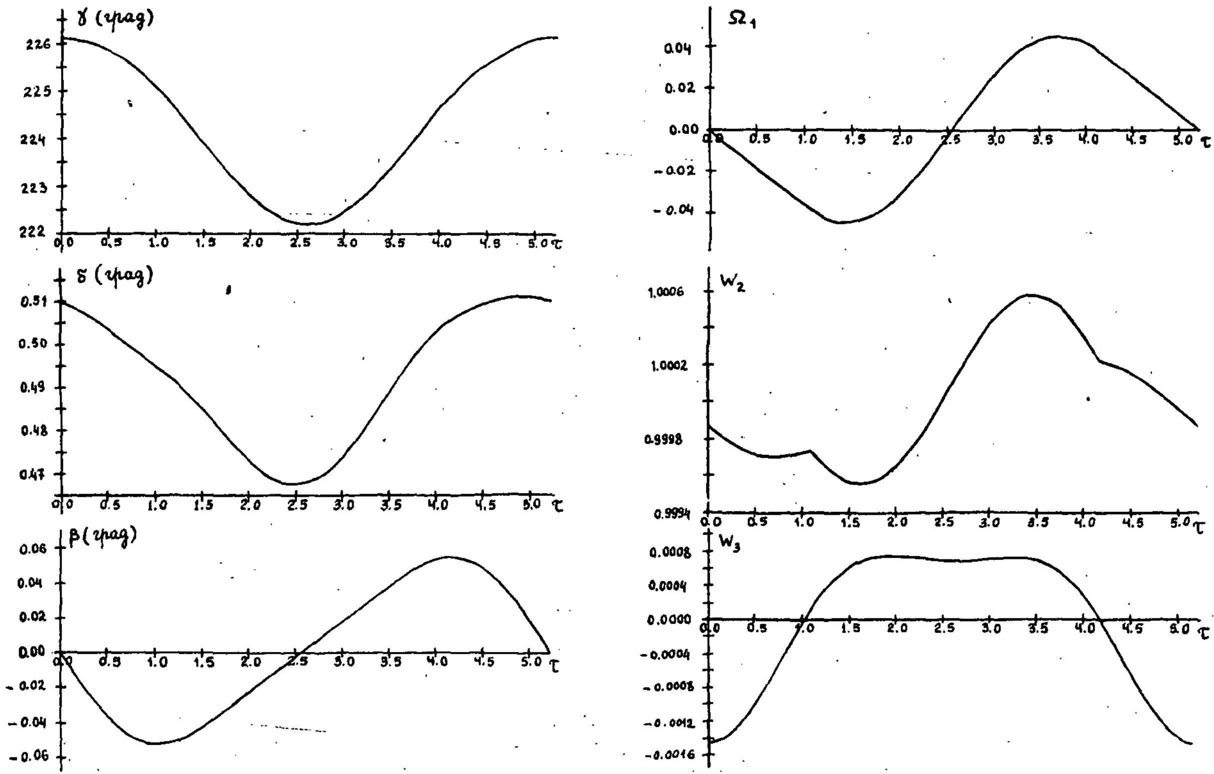
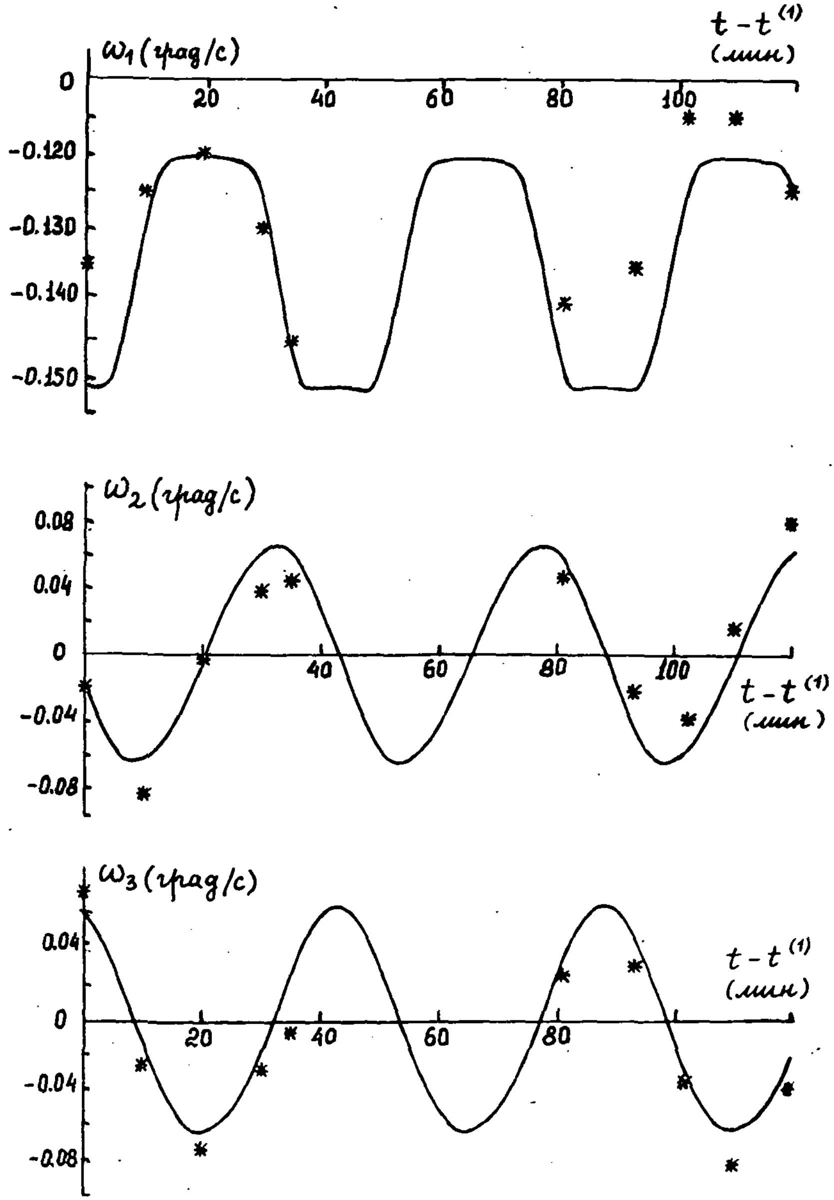


Рис. 7. Периодическое решение (область $\overline{IV}$); $\lambda = 0.05$, $\mu = 0.07$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$, $\mu_3 = 0$; $\gamma(0) = 3.946504$, $\delta(0) = 0.008899$, $\beta(0) = 0.000006$, $\Omega_1(0) = 0$, $W_2(0) = 0.999868$, $W_3(0) = -0.001464$, $T = 5.221362$, $\theta_m = 0.51°$.



ω_1 (град/с)
$t - t^{(1)}$ (мин)
0
-0.120
-0.130
-0.140
-0.150
20
40
60
80
100
ω_2 (град/с)
0.08
0.04
0
-0.04
-0.08
40
60
80
100
$t - t^{(1)}$ (мин)
ω_3 (град/с)
0.04
0
-0.04
-0.08
20
40
60
80
$t - t^{(1)}$ (мин)

Рис. 8

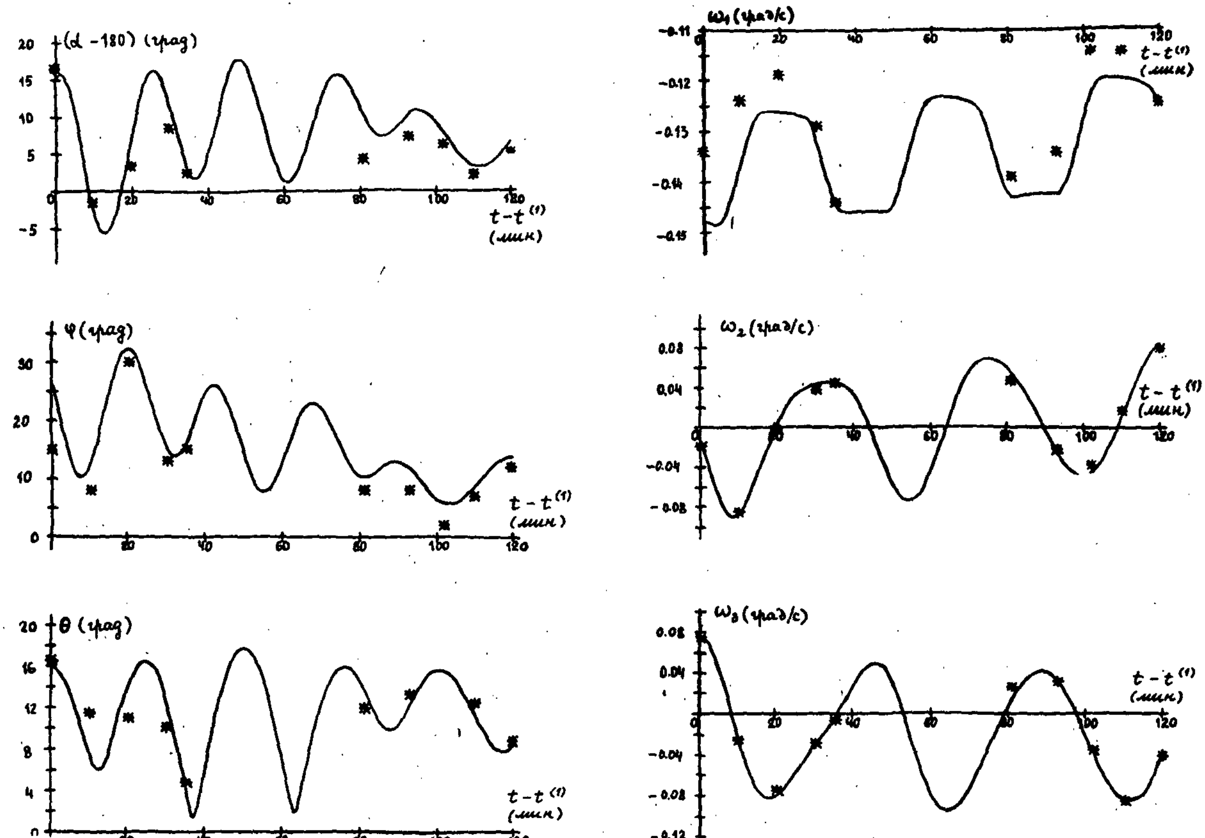

(α −180) (град)
$t-t^{(1)}$ (мин)
ψ (град)
$t-t^{(1)}$ (мин)
θ (град)
$t-t^{(1)}$ (мин)
ω_1 (рад/с)
$t-t^{(1)}$ (мин)
ω_2 (рад/с)
$t-t^{(1)}$ (мин)
ω_3 (рад/с)
$t-t^{(1)}$ (мин)

Рис. 9

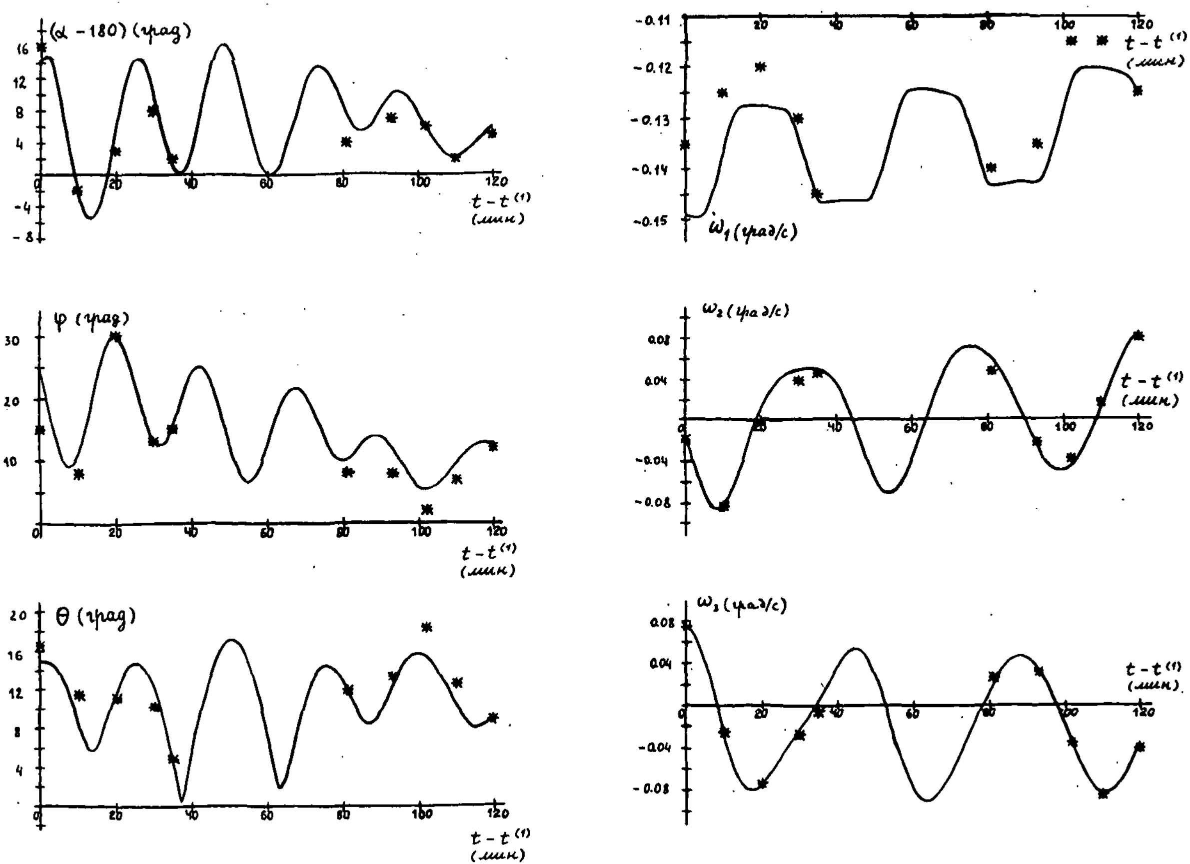


Рис. 10

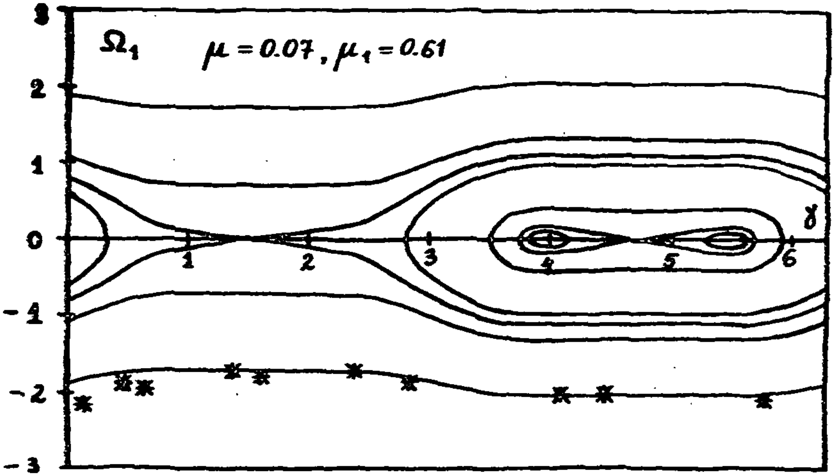

Ω_1 $\mu = 0.07$, $\mu_1 = 0.61$
γ
1
2
3
4
5
6
3
2
1
0
-1
-2
-3

Рис. 11

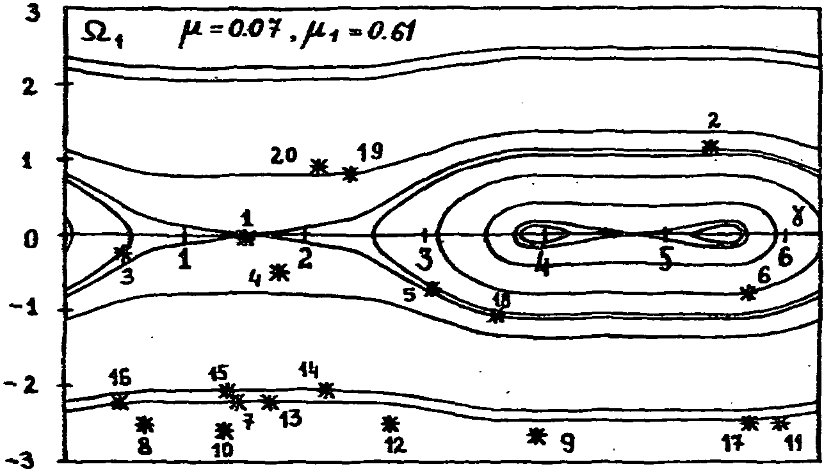

Ω_1 $\mu = 0.07$, $\mu_1 = 0.61$
γ
3
2
1
0
-1
-2
-3
1
2
3
4
5
6
20
19
2
1
3
4
5
18
6
16
15
14
7
13
8
10
12
9
17
11

Рис. 12

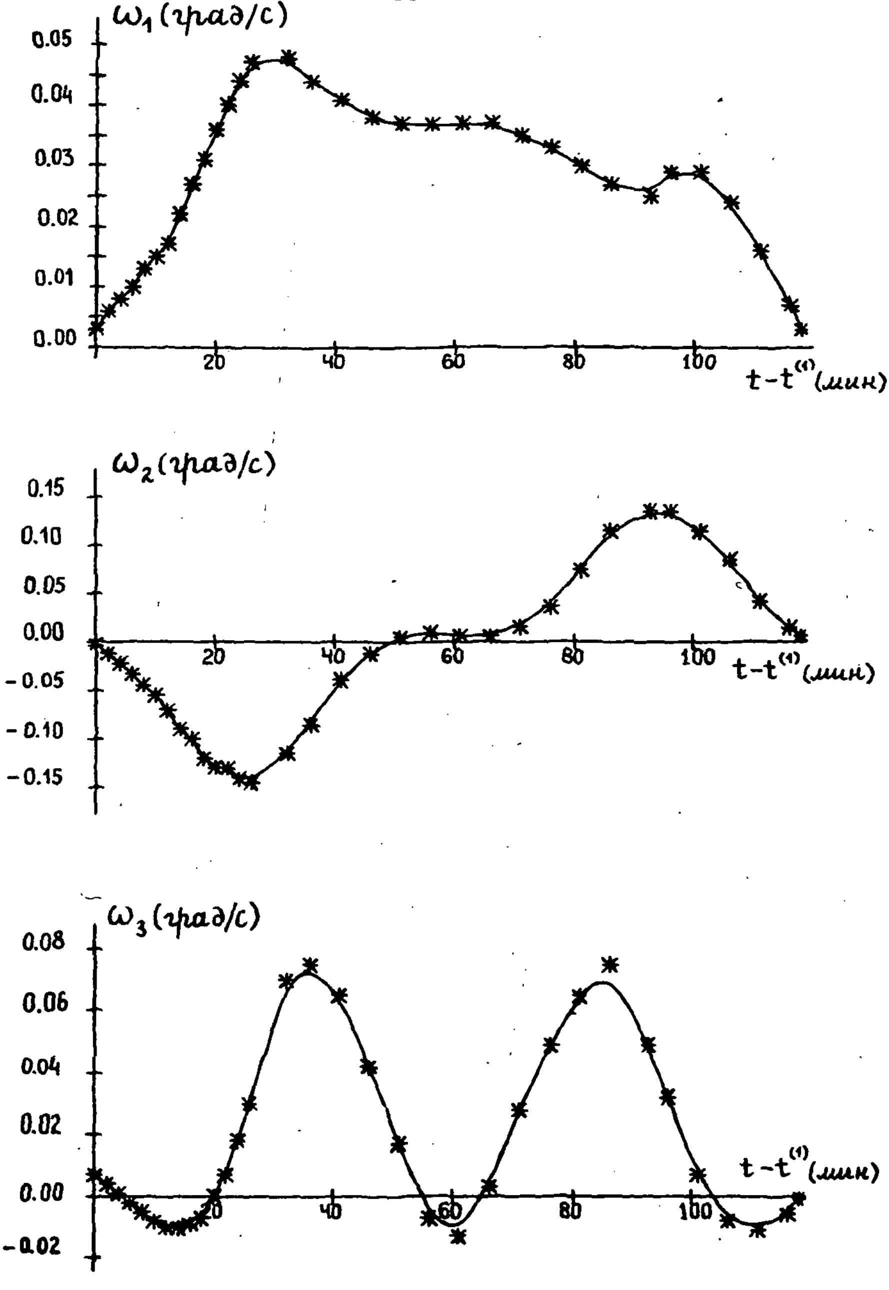

ω1 (град/с)
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)
ω2 (град/с)
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)
ω3 (град/с)
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)

Рис. 13

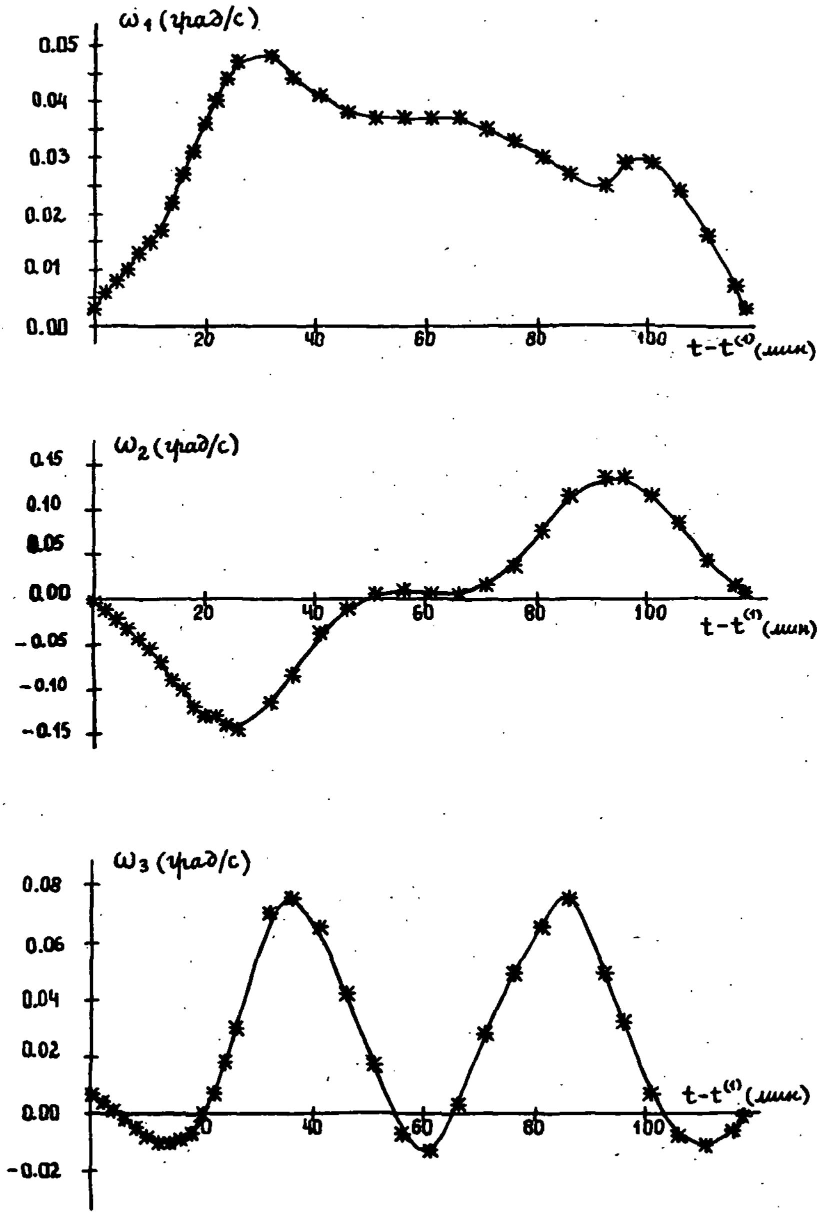
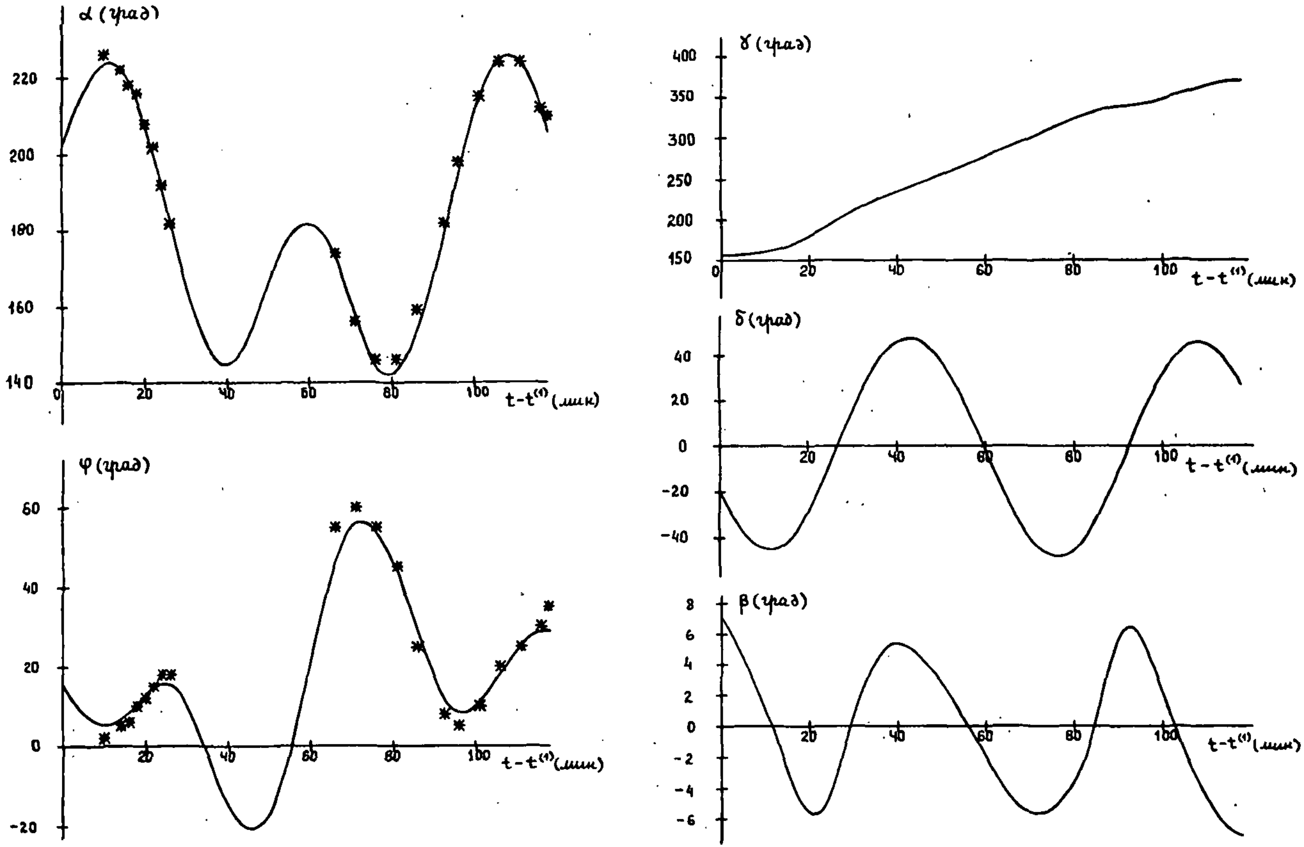

ω1 (град/с)
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)
ω2 (град/с)
0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.15
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)
ω3 (град/с)
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
20
40
60
80
100
t-t(1) (мин)

Рис. 14



α (град)
220
200
180
160
140
0
20
40
60
80
100
t - t(1) (мин)
φ (град)
60
40
20
0
-20
20
40
60
80
100
t - t(1) (мин)
γ (град)
400
350
300
250
200
150
0
20
40
60
80
100
t - t(1) (мин)
δ (град)
40
20
0
-20
-40
20
40
60
80
100
t - t(1) (мин)
β (град)
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
20
40
60
80
100
t - t(1) (мин)

Г.М.Гречко, В.А.Сарычев, В.П.Легостаев, В.В.Сазонов, И.Н.Гансвинд.
"Гравитационная ориентация орбитального комплекса " Салют 6 "-
" Союз."
Редактор В.А.Сарычев. Корректор В.В.Сазонов.

Подписано к печати 02.02.83г. № Т-03462. Заказ № 55.
Формат бумаги 60Х90 1/16. Тираж 200 экз.
Объём 2,5 уч.-изд.л. Цена 18 коп.

055(02)2

©

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Цена 18 коп.