



IN

Grenoble, le 26 Avril 1977

NTG-17255

**CENTRE D'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES ET GÉOPHYSIQUES**

**RAPPORT CEPHAG N° 20/77**

DIFFÉRENTES APPROCHES DE L'ANALYSE  
SPECTRALE

J. L. LACOUME



A paraître dans : Présenté à la Journée d'Etude de la SEE : Déconvolution, filtrage inverse, imagerie - 24.3.77, Grenoble  
Associé au C.N.R.S.

E. N. S. d'Électrotechnique et de Génie Physique . DOMAINE UNIVERSITAIRE . 38400 Saint-Martin-d'Hères . Téléphone (76) 87.96.11  
B. P. 15 38040 GRENOBLE CEDEX

DIFFERENTES APPROCHES DE L'ANALYSE SPECTRALE

RESUME : Depuis quelques années, plusieurs approches du problème de la recherche de la densité spectrale de puissance d'une fonction aléatoire à partir d'une estimation de la fonction d'autocorrélation ont été étudiées.

Nous présentons ici une étude comparative de ces différentes méthodes, en mettant en évidence les principes sur lesquels elles reposent et les hypothèses qu'elles impliquent.

Nous donnons également quelques indications sur l'optimisation de la "longueur" de la fonction de corrélation estimée et nous terminons par un exemple d'application des différentes méthodes présentées.

ABSTRACT : DIFFERENT APPROACHES OF SPECTRAL ANALYSIS.

In the last years, several approaches of the problem of the calculation of the spectral power density of a random function from an estimate of the autocorrelation function have been studied.

We present in this paper a comparative study of these different methods and point out the principles on which they are based and the hypothesis implied.

We give also some indications on the optimization of the "length" of the estimated correlation function and finally we give an example of application of the different methods discussed in this paper.

1. POSITION DU PROBLEME.

L'observation est une réalisation particulière d'une suite aléatoire :

$$X(1) \dots X(M) \dots = \{X(n)\}$$

dont la fonction de corrélation estimée est :

$$\hat{\Gamma}_X(k) \quad |k| \leq N$$

Nous envisagerons successivement les deux questions suivantes :

Problème 1 :

$\Gamma(k)$  ;  $|k| \leq N$  étant supposée connue sans erreurs, trouver la fonction spectrale de  $\{x\}$  :  $P(\lambda)$  telle que

$$\Gamma_X(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda k} P(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

Problème 2 :

On ne dispose que d'estimations  $\hat{\Gamma}_X(k)$  de  $\Gamma_X(k)$  [ $|k| \leq N$ ] calculées à partir d'une suite de longueur  $M$ . Trouver le  $N$  optimal.

2. EXEMPLES DE PROBLEMES PRATIQUES CONDUISANT A CETTE SITUATION.2.1 Analyse spectrale temporelle.

$$\Gamma_X(k) = \Gamma_X(kT_E)$$

fonction de corrélation échantillonnée de la fonction aléatoire  $X(t)$ .

La densité spectrale de puissance de la fonction aléatoire  $X(t)$  est :

$$\gamma_X(\nu) = \text{TF}[\Gamma_X(\tau)]$$

Si  $\gamma_X(\nu) = 0$  pour  $|\nu| > \frac{1}{2T_E}$  (f.a. à spectre borné)

$$P(\lambda) = \frac{1}{T_E \sqrt{2\pi}} \gamma_X\left(\frac{\lambda}{2\pi T_E}\right)$$

pour  $-\pi < \lambda < +\pi$

## 2.2 Antenne formée de multicapteurs.

Soit une antenne linéaire formée de  $N$  capteurs omnidirectionnels  $S_1, \dots, S_N$ . Les sources à l'infini émettent un signal monochromatique (fréquence  $\nu_0$ ). L'amplitude du signal émis par les sources est une fonction aléatoire de l'angle  $\theta$  :  $F(\theta)$ .

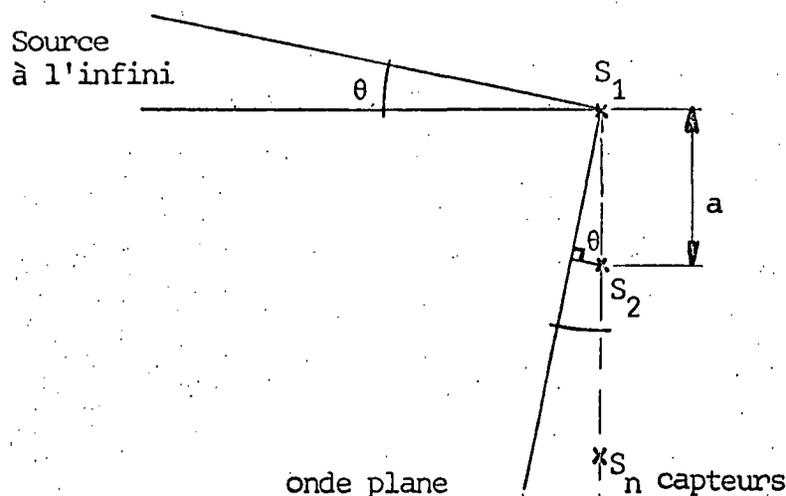


FIGURE 1

On suppose que le champ de sources est à corrélation spatiale microscopique, soit :

$$E[F(\theta) F^*(\theta')] = H(\theta) \delta(\theta - \theta')$$

$H(\theta)$  : intensité dans la direction  $\theta$  . Alors

$$G(\beta) = H\left[\text{Arcsin } \frac{\lambda\beta}{2a\pi}\right] \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\beta}{2a\pi}\right)^2}}$$

où :  $\lambda$  = longueur d'onde  
 $a$  = distance entre capteurs

$$\beta = \frac{2a \sin \theta}{\lambda} \pi$$

et  $\Gamma(k) = E[S_i^* S_{i-k}]$  —  $S_i$  : sortie de capteur  $i$

$\Gamma(k)$  = intercorrélation des signaux reçus sur deux capteurs distants de  $ka$

sont reliés par

$$\Gamma(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{2a}{\lambda}\pi}^{\frac{2a}{\lambda}\pi} G(\beta) e^{ik\beta} d\beta \quad (2)$$

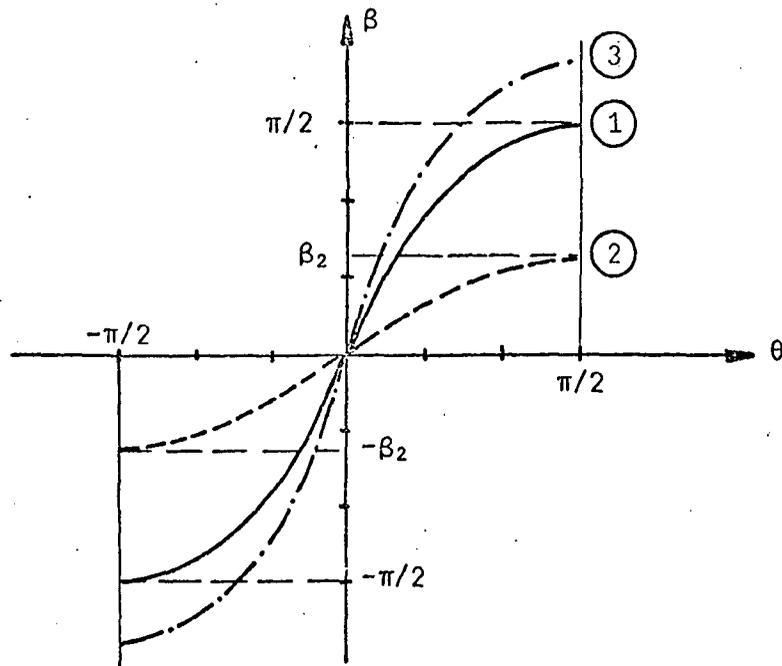
Si

$a = \frac{\lambda}{2}$  : la relation (2) se ramène à (1)

$a < \frac{\lambda}{2}$  : on se trouve dans une situation analogue au sur-échantillonnage. Lorsque  $\theta$  varie de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ ,  $\beta$  varie de  $-\frac{2a}{\lambda}\pi$  à  $\frac{2a}{\lambda}\pi$  ( $\frac{2a}{\lambda} < 1$ ). Il suffit, pour se ramener à (1), de prolonger  $G(\beta)$  par 0 sur  $(-\pi, -\frac{2a}{\lambda}\pi) \cup (\frac{2a}{\lambda}\pi, \pi)$

$a > \frac{\lambda}{2}$  : lorsque  $a$  varie de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$ ,  $\theta$  varie de  $-\frac{2a}{\lambda}\pi$  ( $< -\pi$ ) à  $\frac{2a}{\lambda}\pi$  ( $> +\pi$ )

On peut alors se ramener à (1) seulement dans le cas où  $G(\beta) = 0$  pour  $|\beta| > \pi$ , (les sources sont confinées dans une région de l'espace).



- (1) Lorsque  $\beta$  varie de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ , l'antenne balaie tout l'espace
- (2) Lorsque  $\beta$  varie de  $-\beta_2$  à  $+\beta_2$ , l'antenne balaie tout l'espace
- (3) Lorsque  $\beta$  varie de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ , l'antenne balaie une partie de l'espace.

FIGURE 2

Lorsque les conditions définies ci-dessus sont remplies, le passage de l'observation  $[\Gamma(k)]$  à l'inconnue  $[H(\theta)$  ou  $G(\beta)]$  se ramène au problème d'analyse spectrale défini en 1.

3. RECHERCHE DE LA d.s.p. A PARTIR D'UNE SERIE LIMITEE DE VALEURS EXACTES DE LA FONCTION DE CORRELATION.

$\Gamma_x(k)$  connu sur  $-N \leq k \leq N$

Soit :  $z = e^{i\lambda}$   $-\pi \leq \lambda \leq \pi$

$Q(z) = P[-i \text{Log } z]$  : transformée en  $z$  de  $\{\Gamma_X(k)\}$

$$\Gamma_X(k) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\phi} Q(z) z^{k-1} dz \quad \text{cercle unité}$$

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{-N}^{+N} \Gamma(k) \bar{z}^k + \sum_{|k| > N} \Gamma(k) \bar{z}^k \right]$$

$$Q(z) = Q_{\text{connu}}(z) + Q_{\text{inc.}}(z)$$

- $Q_{\text{connu}}(z)$  est construit à partir des valeurs connues de  $\Gamma(k)$
- $Q_{\text{inc.}}(z)$  dépend de la partie inconnue de  $\Gamma(k)$

Les différentes méthodes consistent à choisir, selon certains "critères", une valeur pour  $Q_{\text{inc.}}(z)$ . Le fait de fixer  $Q_{\text{inc.}}(z)$  revient à "prolonger"  $\Gamma(k)$  au delà de  $k=N$ .

### 3.1 Transformée de FOURIER.

On choisit :  $Q_{\text{inc.}}(z) = 0$

$$\text{Alors : } \Gamma_{\text{TF}}(k) = \Gamma_X(k) \quad |k| \leq N$$

$$= 0 \quad |k| > N$$

\* Problème important

$$P_{\text{TF}}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-N}^{+N} \Gamma_X(k) e^{i\lambda k}$$

n'est pas  $\geq 0 \forall \lambda$  dans tous les cas.

\* Solution :

Fonction d'apodisation (BARTLETT ...), mais alors on ne conserve pas les valeurs connues de  $\Gamma_X(k)$ .

3.2 Maximum d'entropie ou méthode autorégressive.

On impose :

- 1)  $Q_{ME \text{ connu}}(z) = Q_{\text{connu}}(z)$
- 2) "L'entropie"  $H$  du processus prolongé est maximum.

3.21 Remarques sur le calcul de  $H$  :

Considérons une suite aléatoire de longueur  $P + 1$

$$\{X\}_P = \{X(0), \dots, X(P)\}$$

$\{X\}_P$  est une variable aléatoire à  $P + 1$  dimensions. Admettons que :

$$E[X(i)] = 0 \quad \forall i$$

$$E[X(i) X(j)] = \Gamma_{i-j}$$

$\{X\}$  gaussienne

L'entropie de  $\{X\}_P$  est :

$$H_1 = \frac{1}{2} \text{Log} \|\Gamma\| = \frac{1}{2} \sum \text{Log} \lambda_i \quad \|\Gamma\| \text{ déterminant de } \Gamma$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(-P) & \dots & \Gamma(-P) \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(P) & & \Gamma(0) \end{pmatrix}$$

$\lambda_i$  valeurs propres de  $\Gamma$  ( $\geq 0$ ).

Pour passer au cas  $P$  infini, on définit la "densité d'entropie".

$$H_P = \frac{H_P}{P+1}$$

et la "densité d'entropie" d'une suite  $\infty$  en faisant tendre

P vers l'infini

$$H = \lim_{P \rightarrow \infty} H_P$$

$$H = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^P \text{Log } \lambda_i}{P + 1}$$

Un théorème de SZEGÖ nous indique que :

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^P \text{Log } \lambda_i}{P} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log}[P(\lambda)] d\lambda$$

d'où l'entropie de la suite  $\{X\}$

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log}[P(\lambda)] d\lambda$$

### 3.22 Remarque sur le fondement du critère du maximum d'entropie :

La "validité" de ce critère s'appuie sur le fait que le prolongement de la fonction de corrélation ainsi obtenu correspond au processus "le plus désordonné possible" compatible avec les données et l'on a appris en thermodynamique que les systèmes tendent naturellement vers cet état de désordre maximum.

On peut aussi, plus simplement, considérer la minimisation de  $H$  comme une contrainte raisonnable (parmi d'autres) imposée à la partie inconnue de la fonction de corrélation.

3.23 Mise en oeuvre du critère du maximum d'entropie.

$$H = \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log } P_{ME}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{i} \int_{\phi} \text{Log}[Q_{ME}(z)] \frac{dz}{z}$$

on veut maximiser H avec la condition :

$$Q_{ME \text{ connu}}(z) = Q_{\text{connu}}(z)$$

$$Q_{ME}(z) = Q_{ME \text{ connu}}(z) + \sum_{|k| > N} q_k z^k$$

on impose donc

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad |k| > N$$

Soit

$$\int_{\phi} \frac{z^k}{Q_{ME}(z)} \frac{dz}{z} = 0 \quad |k| > N$$

La transformée en z de  $\frac{1}{Q_{ME}(z)}$  est de degré N,

soit :  $\frac{1}{Q_{ME}(z)} = \sum_{-N}^{+N} q'_n z^n$  qui, combiné avec

$$Q_{ME \text{ connu}}(z) = Q_{\text{connu}}(z)$$

fixe  $Q_{ME}(z)$ .

3.24 Liaison avec le filtrage - Détermination de  $P_{ME}(\lambda)$ .

Soit  $G_N$  le filtre linéaire A.R. prédisant  $X_1$  avec une erreur quadratique moyenne minimum lorsque  $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-N+1}$  sont connus et soit  $F_N$  le filtre J- $G_N$

$$F_N\{\{X\}\}_i = X_i - G_N[\{X\}]_i = X_i - \hat{X}_i$$

Soit :  $F_N(z) = \sum_0^N \beta_N z^N$  ( $\beta_0 = 1$ ) l'inverse de la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle du filtre  $F_N$  (r.i. de  $F_N^{-1}$ )

1/

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \text{ est donnée par } \Gamma \cdot \underline{\beta} = \begin{pmatrix} P_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(-N) \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma(N) & \Gamma(0) \end{pmatrix}$$

et  $P_{N+1}$  est l'erreur quadratique moyenne de prédiction.

2/

$$Q_{ME}(z) = \frac{P_{N+1}}{\sqrt{2\pi} F_N(z) F_N^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \quad *$$

Ces résultats nous donnent :

- une méthode de calcul de  $Q_{ME}(z)$  ou  $P_{ME}(\lambda)$  (algorithme de YULE-WALKER) ;
- une interprétation "physique" de  $P_{ME}(\lambda)$  : la d.s.p. du maximum d'entropie est la d.s.p. de la séquence aléatoire engendrée par le filtre  $F_N$  excité par un bruit blanc de puissance  $P_{N+1}/\sqrt{2\pi}$ .

---

\* Cette identité résulte du fait que  $1/Q_{ME}(z)$  et

$$1/Q_{AR}(z) = \frac{\sqrt{2\pi} F_N(z) F_N^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{P_{N+1}} \text{ sont de degré } N \text{ et que}$$

$$Q_{AR}(z) = Q_{ME}(z) = Q_{connu}(z) \text{ jusqu'à l'ordre } N.$$

On peut ramener un problème d'analyse spectrale à un problème d'identification d'un filtre linéaire.

### 3.3 Méthode de PISARENKO.

On a vu que :

$$\frac{1}{Q_{ME}(z)} = \sum_{-N}^{+N} q'_n z^n \quad ; \quad q'_n = q'^*_{-n}$$

Soit

$$\frac{1}{Q_{ME}(z)} = q_N \sum_{n=1}^N (z - z_n) \left( \frac{1}{z} - z_n^* \right)$$

avec  $|z_n| \leq 1 \quad \forall n$

Avec cette écriture il vient pour

$$\Gamma_{ME}(k) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int Q_{ME}(z) \frac{dz}{z} z^k$$

$$\Gamma_{ME}(k) = \sum_1^N q_N |z_N|^k \cos[k\phi_n]$$

en posant

$$z_n = |z_n| e^{i\phi_n} \quad \text{avec } |z_n| \leq 1$$

$\Gamma_{ME}(k)$  est donc la somme de  $N$  cosinusoides amorties

PISARENKO a montré que l'on peut écrire :

$$\Gamma_P(k) = \mu_0 \delta(k) + \begin{cases} \sum_1^{N/2} \alpha_i \cos k\phi_i & N \text{ pair} \\ c + \sum_1^{(N-1)/2} \alpha_i \cos k\phi_i & N \text{ impair} \end{cases}$$

avec la condition :

$$\Gamma_p(k) = \Gamma_X(k) \quad |k| \leq N$$

Interprétation : PISARENKO interprète  $\Gamma_X(k)$  comme formé par

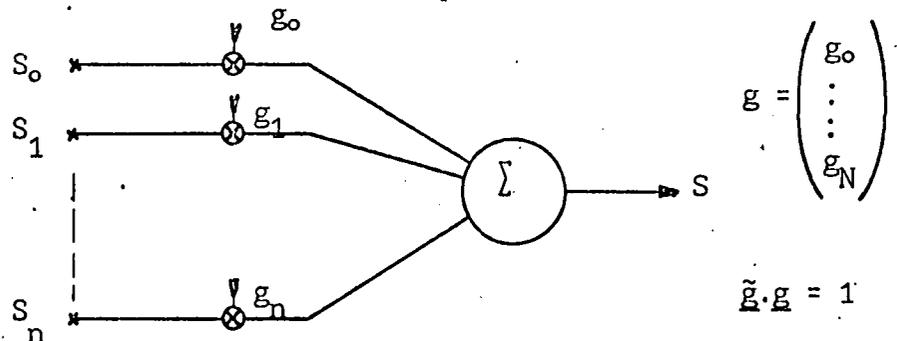
- un bruit blanc  $[\mu_0 \delta(k)]$
- N "raies pures" de "fréquence"  $\phi_i$

En termes d'antenne : un bruit blanc omnidirectionnel et N sources ponctuelles.

- Détermination de  $\mu_0$  (puissance du bruit blanc) et des  $\phi_i$ .

Prenons le cas d'une antenne et réalisons la "formation de voies" décrite ci-dessous :

FIGURE 3



La puissance en sortie est :

$$E |S|^2 = \underline{\tilde{g}} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{g} \quad \underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma(0) & - & \Gamma(-N) \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(N) & - & \Gamma(0) \end{pmatrix}$$

- Cherchons le  $\underline{g}_m$  qui "élimine les N sources ponctuelles".  
Pour  $\underline{g} = \underline{g}_m$   $E[|S|^2]_{\min} = \mu_0$

$\underline{g}_m$  est le vecteur propre associé à la valeur propre minimum de  $\underline{\Gamma}$ . (supposée  $\geq 0$ ).

- $\mu_0$  = valeur propre minimale de  $\underline{\Gamma}$ .

Enfin :  $\sum_0^N g_{mk} e^{ik\lambda_j} = 0$  puisque les sources sont éliminées.

- Les  $z_j = e^{i\lambda_j}$  sont donc les  $N$  racines de :

$$\sum_0^N g_{mk} z^k = 0$$

### 3.4 Méthodes hybrides (M.E. - PIS)

PISARENKO donne le résultat suivant :

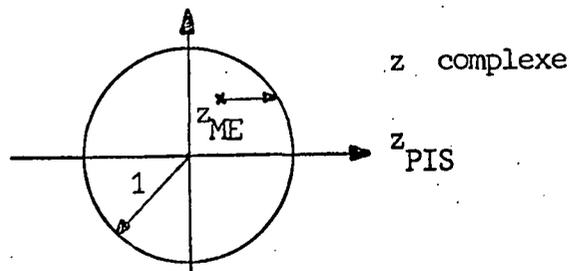
- Soit  $\underline{\Gamma}$  associée à la séquence  $\{X(n)\}$ . Soit  $\mu$  tel que  $0 < \mu < \mu_0$  (v.p. min. de  $\underline{\Gamma}$ ). Soit :  $\underline{\Gamma}_\mu = \underline{\Gamma} - \mu \underline{\Gamma}$

( $\underline{\Gamma}_\mu$  correspond à une séquence dont on a retiré une partie du bruit blanc).

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} P_{\mu ME}(\lambda) = P_{PIS}(\lambda)$$

Revenant à notre interprétation de 3.3, on a le comportement suivant : aux  $N$  cosinusoides amorties de  $P_{ME}(X)$  correspondent  $N$  racines de module  $< 1$ . Lorsque  $\mu \rightarrow \mu_0$ , les  $N$  racines tendent vers  $N$  points de cercle unité ( $z_{PIS}$ ).

FIGURE 4



- D'où les méthodes "hybrides" : on remplace  $\underline{\Gamma}$  par  $\underline{\Gamma}_\mu$  ( $\mu < \mu_0$ ) et l'on calcule  $P_{ME\mu}(\lambda)$  associée à  $\underline{\Gamma}_\mu$ .

Comportement d'une raie :

Le fait de retirer une partie du bruit blanc entraîne une "amplification" de plus en plus poussée des raies spectrales

(On tend vers des impulsions de DIRAC lorsque  $\mu \rightarrow \mu_0$ ).

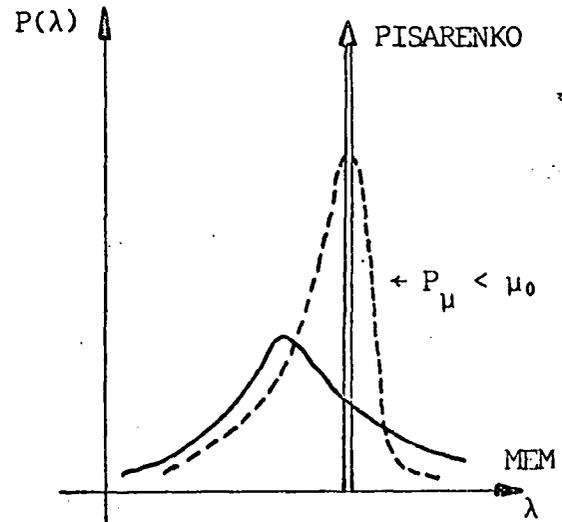


FIGURE 5

#### 4. QUELQUES INDICATIONS SUR LES ERREURS D'ESTIMATION ET LA RECHERCHE D'UNE "LONGUEUR" N OPTIMALE.

On dispose de

$$\{x(n) ; 0 < n < M\}$$

et on estime la fonction de corrélation par :

$$\{\hat{\Gamma}_X(k) ; 0 < k \leq N\}$$

dans les différentes situations décrites ci-dessus, nous allons chercher à définir et à calculer une valeur optimale pour  $N$ , longueur de la fonction de corrélation estimée.

##### 4.1 Transformée de FOURIER.

Avec l'hypothèse que le support de la fonction de corrélation est de l'ordre de  $N$  [ $|\Gamma_X(k)| \ll \Gamma_X(0)$  si  $|k| > N$ ] et en appelant  $P_V(\lambda)$  la vraie valeur de la d.s.p., la variance de l'estimée  $\hat{P}_{TF}(\lambda)$  de la d.s.p. est :

$$\text{Var}[\hat{P}_{TF}(\lambda)] = \frac{2N}{M} P_V^2(\lambda)$$

l'erreur quadratique totale est :

$$E_{QT}(\lambda) = (\text{Biais})^2 + \text{Variance}$$

Soit

$$E_{QT}(\lambda) = [P_{\text{DFT}}(\lambda) - P_V(\lambda)]^2 + \text{Var } \hat{P}_{\text{DFT}}(\lambda)$$

Prenons comme mesure de l'erreur totale :

$$E_T(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_{QT}(\lambda) d\lambda$$

$$E_T(N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [P_{\text{DFT}}(\lambda) - P_V(\lambda)]^2 d\lambda + \frac{2N}{2\pi M} \int_{-\pi}^{+\pi} P_V^2(\lambda) d\lambda$$

qui s'écrit, en utilisant la relation de PARSEVAL :

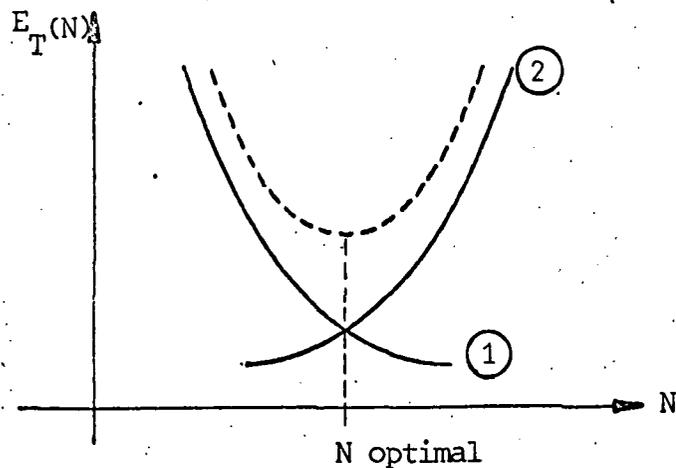
$$E_T(N) = \sum_{|k|>N} |\Gamma_X(k)|^2 + \frac{2N}{M} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_X(k)|^2$$

$$= \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 2$$

1 décroît lorsque N croît (fig 6)

2 croît lorsque N croît (fig 6)

d'où l'apparition d'un N optimal.



CEPHAG

Exemple :

Soit :  $\Gamma(k) = q^{|k|}$

$$\sum_{|k| > N} |\Gamma(k)|^2 = \frac{2}{1-q^2} q^{2N+2}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(k)|^2 = \frac{1+q^2}{1-q^2}$$

Soit

$$E_T(N) = \frac{\frac{2N}{M}(1+q^2) + 2q^{2N+2}}{1-q^2}$$

$N_{opt}$  est obtenu pour :

$$\frac{dE_T(N)}{dN} = 0 \quad \text{soit :}$$

$$N_{opt} = \frac{\log k}{2 \log q} - .1$$

$$K = \frac{1+q^2}{2M(-\log \phi)}$$

$q = 0,8$	$M = 100$	$N_{opt} = 7,4 : 8$
	$M = 200$	$N_{opt} = 8,96 : 9$
	$M = 50$	$N_{opt} = 6 : $

$q = 0,707 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$M = 100$	$N_{opt} = 5,53 : 6$
	$M = 50$	$N_{opt} = 4,53 : 5$

4.2 M E M

• AKAIKE a introduit le F.P.E. (final prediction error).

Soit un filtre A.R. d'ordre  $N$  estimant  $Y_k$  à partir d'une

estimation du filtre prédicteur issue de  $\hat{\Gamma}_N$

$$FPE = E[(Y_k - \hat{Y}_k)^2] \quad \beta_{M,m} \text{ filtre de prédiction}$$

$$\hat{Y}_N = \sum_{k=1}^N \hat{\beta}_{M,m} Y_{k-m} \quad \Delta\hat{\beta}_{M,m} : \text{erreur d'estimation du filtre de prédiction.}$$

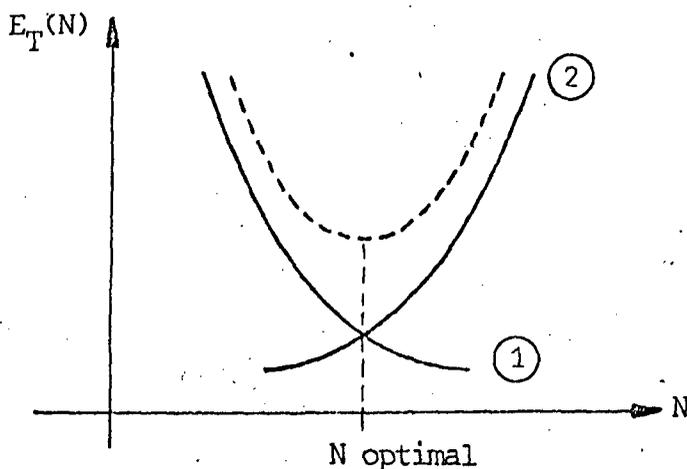
$$\hat{\beta}_{M,m} = \beta_{M,m} + \Delta\hat{\beta}_{M,m}$$

En supposant  $\Delta\hat{\beta}_{M,m}$  et  $Y_k$  indépendants il vient :

$$FPE = \underbrace{E[(Y_k - \sum_{k=1}^N Y_{k-m} \beta_{M,m})^2]}_1 + \underbrace{E[(\sum_{k=1}^N \Delta\beta_{M,m} Y_{km})^2]}_2$$

1 erreur de prédiction

2 erreur d'estimation du filtre A.R.



AKAIKE propose :

$$(FPE)_N = \frac{M + (N+1)}{M - (N-1)} \hat{S}_M^2$$

$\hat{S}_M^2$  : estimation de l'erreur de prédiction.

Figure 7

### 5. CONCLUSION.

Dans cet exposé nous avons décrit, en essayant de montrer les liens qui les unissent, un certain nombre de méthodes d'analyse spectrale. Dans ce sujet, très vaste,

nous nous sommes limités aux méthodes basées sur le théorème de WIENER-KINTCHINE pour lesquelles la densité spectrale de puissance est obtenue à partir d'une estimation de la fonction de corrélation.

Nous pensons avoir mis en évidence l'aspect relatif des "qualités" des différentes méthodes et, en particulier, nous espérons avoir contribué à démystifier la "vertu suprême" consistant à faire "sortir des raies pures". Il est clair, en effet, que ce simple critère ne peut servir de jugement objectif lorsque l'on sait que la méthode de PISARENKO conduit toujours à des raies pures.

Quant à la question de savoir quelle est la meilleure méthode, notre réponse sera que cela dépend des connaissances autres que celles issues de l'estimation de la fonction de corrélation dont dispose l'expérimentateur. Si le signal étudié est effectivement issu du filtrage d'un bruit blanc, la méthode du maximum d'entropie est la mieux adaptée; si le signal est formé de raies pures, la méthode de PISARENKO s'impose. Ceci nous conduit, en terminant, à insister sur l'importance de la connaissance d'un modèle du système physique étudié.

APPENDICE : EXEMPLE D'APPLICATION

A.1 :

$\Gamma(k)$  connu sur  $-3, +3$  et formé d'un cosinus amorti :

$$\Gamma(0) = 1 \quad \Gamma(1) = q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Gamma(2) = 0 \quad \Gamma_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3$$

$$\Gamma(k) = q^{|k|} \cos\left[\left(\frac{1}{4}\right)\pi k\right]$$

Calculons les différentes dsp définies ci-dessus.

A.11 Transformée de FOURIER (TF)

$$P_{TF}(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [1 + q\sqrt{2} \cos \lambda - q^3\sqrt{2} \cos 3\lambda]$$

On constate (fig. 8) que cette dsp n'est pas  $\geq 0$

Calculons la dsp obtenue avec une fonction de pondération de BARTLETT :

$$F_B(k) = \left(1 - \frac{|k|}{4}\right)$$

$$P_{BARTLETT}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} q \cos \lambda - \frac{Q^3\sqrt{2}}{4} \cos 3\lambda\right]$$

A.12 Maximum d'entropie :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} q & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 \\ q \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} q & 0 \\ 0 & q \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & q \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 & 0 & q \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \cdot \underline{\beta} = \begin{pmatrix} P_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = + \frac{\sqrt{2}}{2} q \left(1 + \frac{q^2}{2}\right)$$

$$\beta_2 = - \frac{q^2}{2}$$

$$\beta_3 = - q^3 \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$P_4 = 1 - \frac{q^2}{2} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^6}{4}$$

Posant :  $F(z) : 1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \beta_3 z^3$

il vient

$$P_{MEM}(\lambda) = \frac{1 - \frac{q^2}{2} - \frac{q^4}{4} - \frac{q^6}{4}}{\sqrt{2\pi} \left[ 1 + \frac{q^2}{4} + \frac{3q^4}{4} + \frac{q^6}{4} - \sqrt{2}q(1+q^2)\cos \lambda + \left(q^2 - \frac{q^4}{4} - \frac{q^6}{4}\right)\cos 2\lambda + \frac{q^3\sqrt{2}}{2}\cos 3\lambda \right]}$$

### A.13 Méthode de PISARENKO.

On reprend  $\Gamma$  défini en 3.52

$$\Gamma - \mu I = \begin{pmatrix} 1-\mu & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 \\ \frac{q\sqrt{2}}{2} & 1-\mu & \frac{\sqrt{2}}{2} q & 0 \\ 0 & \frac{q\sqrt{2}}{2} & 1-\mu & \frac{q\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 & 0 & \frac{q\sqrt{2}}{2} & 1-\mu \end{pmatrix}$$

D'où on déduit les mineurs de la première ligne :

$$A_{11} = [1-\mu]^3 - q^2[1-\mu]$$

$$A_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} q[(1-\mu)^2 - \frac{q^2}{2} - \frac{q^4}{2}]$$

$$A_{13} = (1-\mu) \left[ \frac{q^2 - q^4}{2} \right]$$

$$A_{14} = -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3[(1-\mu)^2 - \frac{1}{2} - \frac{q^2}{2}]$$

et l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} x^2 - \frac{3q^2 + q^6}{2} x + \frac{q^4}{4} (1 + q^2)^2 = 0 \\ x = (1-\mu)^2 \end{cases}$$

Soit :

$$x = \frac{q^2}{4} [3 + q^4 \pm \sqrt{B}]$$

$$B = 5 - 8q^2 + 2q^4 + q^8$$

et les 4 valeurs propres.

Nous avons mené le calcul jusqu'au bout dans un cas particulier (cf A2).

#### A.14 Méthodes hybrides.

Soit  $0 \leq \mu < \mu_{\min}$

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma - \mu I$$

MEM

$$\Gamma_{\mu} = \begin{pmatrix} 1-\mu & \frac{\sqrt{2}}{2} q & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 \\ q \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\mu & \frac{\sqrt{2}}{2} q & 0 \\ 0 & \frac{q\sqrt{2}}{2} & 1-\mu & \frac{q\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} q^3 & 0 & \frac{q\sqrt{2}}{2} & 1-\mu \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = -\beta_1 = -\frac{q\sqrt{2}}{2(1-\mu)} \left[ \frac{2(1-\mu)^2 - q^2(1+q^2)}{2[(1-\mu)^2 - q^2]} \right]$$

$$\gamma_2 = \frac{q^2(1-q^2)}{2[(1-\mu)^2 - q^2]}$$

$$\gamma_3 = \frac{q^3\sqrt{2}}{2(1-\mu)} \cdot \frac{2(1-\mu)^2 - (1+q^2)}{2[(1-\mu)^2 - q^2]}$$

Posant

$$x = (1-\mu)^2$$

$$P_4 = \frac{4x^2 - (6q^2 + 2q^6)x + q^4(1+q^2)^2}{4\sqrt{x}[x - q^2]}$$

Enfin

$$P_{\mu \text{ MEM}}^{(\lambda)} = \frac{P_4}{\sqrt{2}\pi[A + B \cos \lambda + C \cos 2\lambda + D \cos 3\lambda]}$$

$$A = 1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$$

$$B = 2[\gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3]$$

$$C = 2[\gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3]$$

$$D = 2 \gamma_3$$

## A.2 Exemples numériques :

Dans le cas décrit en A1 nous avons fait :

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soit

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= 1 \\ \Gamma(1) &= 0,5 \\ \Gamma(2) &= 0 \\ \Gamma(3) &= -0,25\end{aligned}$$

alors

$$P_{TFP}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [1 + \cos \lambda - 0,5 \cos 3\lambda]$$

$$P_{TFB}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [1 + 0,75 \cos \lambda + 0,125 \cos 3\lambda]$$

$$P_{MEM}(\lambda) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{0,65625}{1,46875 - 1,5 \cos \lambda - 0,34375 \cos 2\lambda + 0,25 \cos \lambda}$$

$$P_{PIS}(\lambda) = 0,25 + 0,25 \delta(0) + 0,5 \delta(\lambda - 0,33)$$

$$P_{MEM\mu}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{P_4}{A + B \cos \lambda + C \cos 2\lambda + D \cos 3\lambda}$$

$$\mu_0 = 0,25$$

	$\mu = 0,225$ 90 % de $\mu_0$	$\mu = 0,2375$ 95 % de $\mu_0$	$\mu = 0,2475$ 99 % de $\mu_0$
$P_4$	0,171 141	0,100 94	0,2475
A	4,8651	6,58320	9,08697
B	- 7,677	- 10,51651	- 14,54957
C	3,8699	5,32894	7,30752
D	- 0,9577	- 1,35804	- 1,84268

Les d.s.p. obtenues sont présentées sur les figures suivantes.

- [1] LACOSS (R.T.). Data adaptive spectral analysis methods. Géophysics, Vol. 36, N° 4 (Août 1971) p. 661-675
- [2] ULRYCH (T.J.), BISHOP (T.N.). Maximum entropy spectral analysis and autoregressive décomposition. Reviews of Geophysics and Space Physics. Vol. 13, N° 1, Feb. 75.
- [3] PISARENKO(V.F.). The retrieval of harmonics from a covariance function. Geophysics J. R. Astr. Soc. (1973), 33, p. 347-366
- [4] FROST (O.L.). Power spectrum estimation. Nato Advanced Study Institute on Signal Processing (30.9 - 11.10.1976, La Spezia)

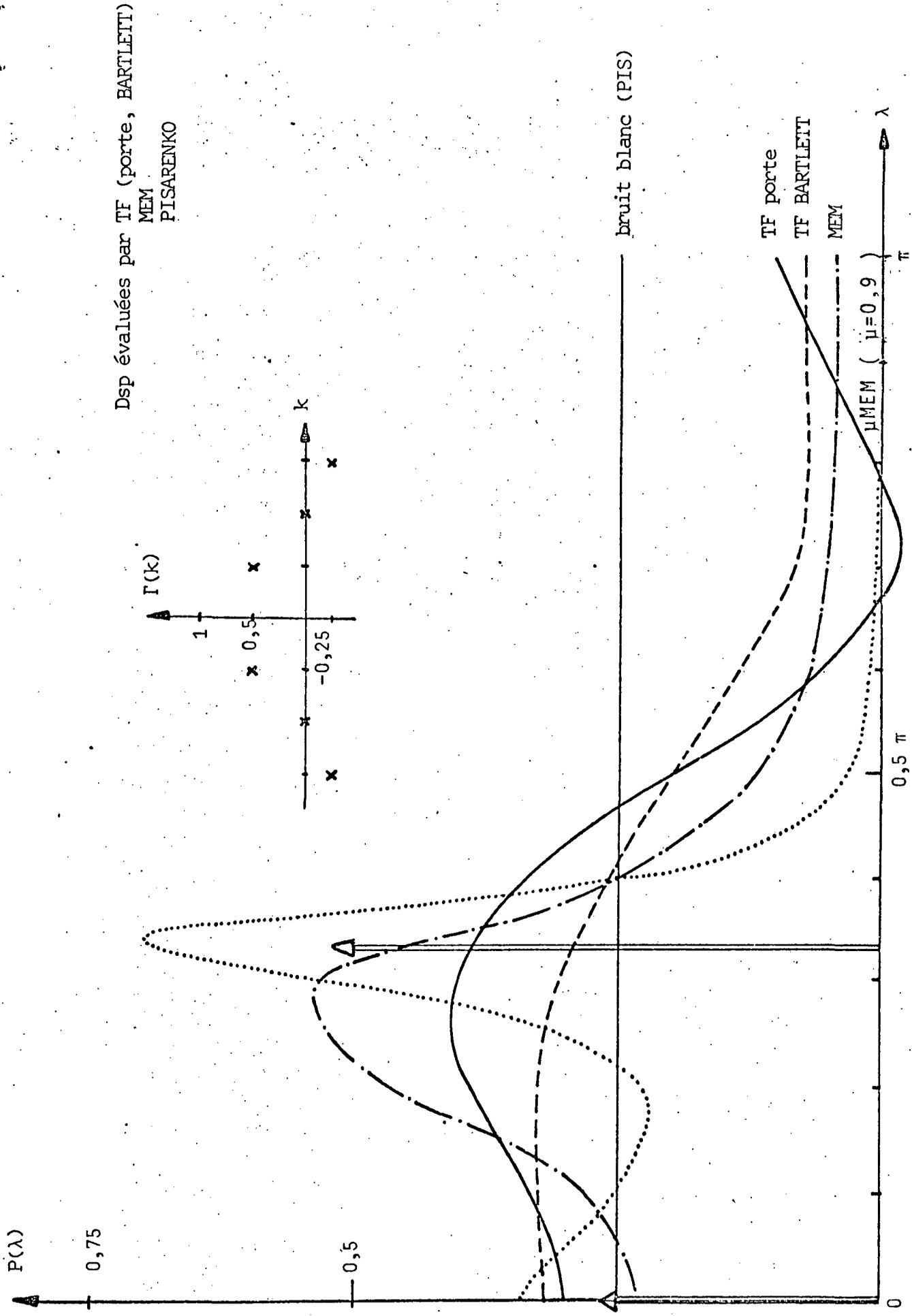


FIGURE 8

Dsp évaluées par des méthodes hybrides

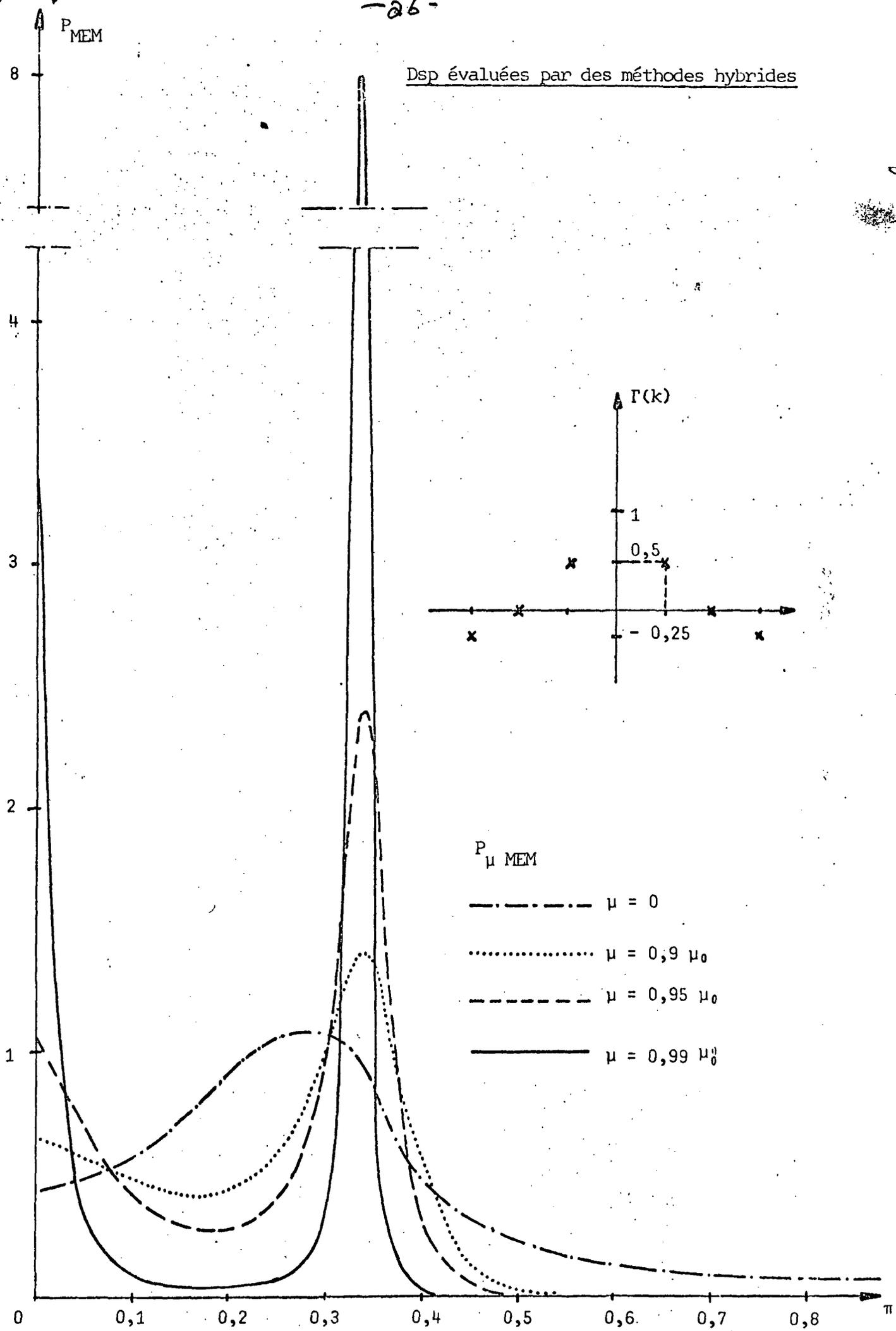


FIGURE 9